

Bancada Coaxial de Medida

Ana Vieira da Silva n°46722

Artur Palha n°46724

Pedro Ribeiro n°46751

9 de Junho de 2002

Resumo

Estudo de uma linha de transmissão e criação de harmónicas em alta frequência pela desadaptação da impedância da terminação da linha.

Descrição da Experiência

Para se determinar o valor das grandezas em estudo neste trabalho experimental, procedeu-se à localização, por detecção directa do sinal de rádio frequência, dos dois zeros mais próximos da carga. Isto para LM^1 , $LM + LCF^2(1)$ e $LM + LCF(2)$.

Procedimento experimental

Procedeu-se segundo a descrição do guia. Desta forma, salientam-se apenas os pontos relevantes para uma posterior repetição da experiência. Inicialmente todo o aparato foi configurado por forma a que se maximizasse o sinal na linha de transmissão, regulando-se para isso os *stubs*. Em seguida, por sugestão do docente, e uma vez que o *stub* associado à sonda se encontrava a fazer mau contacto, este foi substituído. Com o *stub* definitivo fizeram-se as seguintes regulações:

- Sinal injectado com uma frequência de 950MHz;
- $\Delta f = 98\%$ com 0.1% por div;
- Máximo do sinal (240μ) na sonda no ponto $x = 40.0\text{cm}$, para o *stub* na posição 19cm.

Montagem Experimental

A montagem experimental utilizada nesta experiência foi a apresentada na Figura 1.

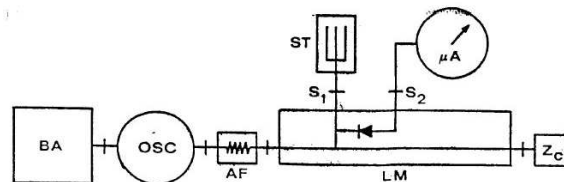


Figura 1: Esquema da montagem experimental.

¹Linha coaxial de medida.

²Linha de comprimento fixo: (1) 10cm; (2) 20cm

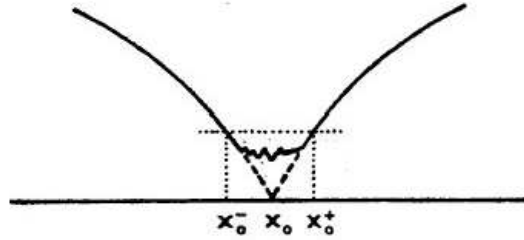


Figura 2: Interpolação

- BA - Base de alimentação
- OSC - Oscilador
- AF - Atenuador fixo
- LM - Linha coaxial de medida
- ST - Troço de linha de comprimento variável em curto-circuito (*stub*)
- μA - MicroAmperímetro
- ZL - Terminação

Determinação da frequência de trabalho

Com o sistema sintonizado, através da regulação do *stub*, como foi descrito atrás, procedeu-se à localização dos zeros de amplitude da corrente eléctrica I , utilizando o seguinte método de interpolação: Sendo x_0 dado pela seguinte expressão:

$$x_0 = \frac{x_0^+ + x_0^-}{2}$$

Este método pode ser utilizado sempre que a função para a qual se quer determinar o zero³ seja simétrica em torno do zero. Tal é verificado no nosso caso uma vez que o potencial eléctrico e a corrente eléctrica, dentro da linha de transmissão, variam segundo as Equações 1 e 2. O que, claramente, é simétrico em torno dos zeros, pelo que o método é perfeitamente aplicável.

x_0^+ e x_0^- foram medidos para valores de I de $10 \mu A$.

O que nos leva a optar por este método ao invés da medição imediata do zero é o facto de existir um *patamar*, como se mostra na Figura 2. Assim é difícil determinar o zero com exactidão, através de inspecção directa. Escolhendo um valor de corrente (I) em torno do zero, e medindo as suas abcissas determina-se, com maior precisão o zero.

Medição do comprimento eléctrico de um troço de linha

Terminou-se a LM de acordo com o esquema presente na Figura 3. A medição dos comprimentos

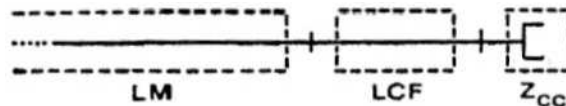


Figura 3: Terminação de LM, para determinar ℓ_e

físicos foi feita estipulando um ponto de referência: o início de Z_{cc} . Os valores medidos são apresentados de seguida, em **Registo dos dados**.

³Não tem necessariamente de ser um zero, tem apenas de ser um extremo da função.

Registo de dados

Era apenas necessário determinar os dois zeros mais próximos da carga, mas localizou-se todos os zeros encontrados ao longo da linha. O eixo utilizado tinha origem no ponto de injeção do sinal. Logo os zeros mais próximos da carga são os que apresentam valores maiores. Apresentam-se, na Tabela 1 os zeros para as duas situações ($Z_L=0$ e $Z_L \rightarrow \infty$).

$x_0^-(cm)$	$x_0^+(cm)$	$x_0(cm)$	$x_0^-(cm)$	$x_0^+(cm)$	$x_0(cm)$
7.85	9.50	8.68	15.80	17.70	16.75
22.95	25.20	24.08	31.40	33.25	32.33
38.50	40.80	39.65	46.90	48.85	47.88
$Z_L \rightarrow \infty$			$Z_L=0$		

Tabela 1: Determinação dos zeros por interpolação.

Relativamente à segunda parte da experiência, localizou-se o zero mais próximo da carga, para os dois acrescentos LCF, obtendo-se os resultados da Tabela 2.

LCF	$x_0^-(cm)$	$x_0^+(cm)$	$x_0(cm)$
10cm	41.20	43.40	42.30
20cm	35.75	43.40	42.30

Tabela 2: Determinação dos zeros por interpolação, com LCF

Os valores dos máximos de corrente, para as diferentes terminações, são apresentados na Tabela 3

ZL (Ω)	I (μA)
0	240
50	85.0
∞	171

Tabela 3: Máximos de corrente para as diferentes terminações ZL.

Quando a terminação estava *matched*, ou seja, $Z_L = 50\Omega = Z_0$, observou-se que a corrente não variava ao longo da linha de transmissão.

Tratamento de dados

Determinação da frequência de trabalho

Das equações de Maxwell obtêm-se as seguintes equações diferenciais para o potencial eléctrico (V) e a corrente eléctrica (I) na linha de transmissão:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V(x)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -\gamma^2 I(x)$$

com

$$\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$$

Considerando que é um meio sem perdas, estas equações são equações de onda, com velocidade LC. Como:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\mu\epsilon}{L}$$

verifica-se facilmente que $CL = \mu\epsilon$, é a velocidade da luz num meio com características μ , ϵ . Resolvendo estas equações obtém-se a seguinte solução para a corrente (I) que passa na linha e para a tensão (V)⁴:

$$\begin{aligned} I(x) &= I e^{-i\omega t} (e^{i\beta x} - \Gamma e^{-i\beta x}) \\ V(x) &= V e^{-i\omega t} (e^{i\beta x} + \Gamma e^{-i\beta x}) \end{aligned}$$

onde:

$$\Gamma \equiv \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

é o coeficiente de reflexão.

Uma análise destas expressões e de outras⁵ revela-nos a seguinte variação da corrente e da tensão ao longo da linha de transmissão em estudo, em função das corrente e tensão injectadas:

$$V(x') = \frac{Z_0 V_g}{Z_0 + Z_g} e^{-i\beta x'} \left(\frac{1 + \Gamma e^{-2i\beta x'}}{1 - \Gamma_g \Gamma e^{-2i\beta l}} \right) \quad (1)$$

$$I(x') = \frac{V_g}{Z_0 + Z_g} e^{-i\beta x'} \left(\frac{1 - \Gamma e^{-2i\beta x'}}{1 - \Gamma_g \Gamma e^{-2i\beta l}} \right) \quad (2)$$

com

$Z_0 \equiv$ Impedância da linha

$V_g \equiv$ Tensão à saída do gerador

$Z_g \equiv$ Impedância do gerador

$\Gamma_g \equiv \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \simeq 0$, neste caso

$l \equiv$ Comprimento da linha

$\beta \equiv \frac{\omega}{v_{ph}} = \frac{2\pi}{\lambda}$, neste caso $v_{ph} = c$

$x' \equiv l - x$.

Das expressões acima obtém-se as seguintes expressões para a corrente $I(x')$:

$$R_L = 0 \quad \rightarrow \quad I(x') = \frac{V_g}{Z_0 + Z_g} e^{-i\beta x'} \left(\frac{1 + e^{-2i\beta x'}}{1 + \Gamma_g e^{-2i\beta l}} \right)$$

$$R_L = R_0 \quad \rightarrow \quad I(x') = \frac{V_g}{Z_0 + Z_g} e^{-i\beta x'}$$

$$R_L \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad I(x') = \frac{V_g}{Z_0 + Z_g} e^{-i\beta x'} \left(\frac{1 - e^{-2i\beta x'}}{1 - \Gamma_g e^{-2i\beta l}} \right)$$

Resultando nas seguintes razões:

$$\left| \frac{I(x')_{R_L=0}}{I(x')_{R_L=R_0}} \right| = \left| \frac{I(x')_{R_L \rightarrow \infty}}{I(x')_{R_L=R_0}} \right| = \frac{2}{\sqrt{1 + \Gamma_g^2 + 2\Gamma_g \cos(2\beta l)}} \simeq 2, \quad \text{neste caso} \quad (3)$$

Como se pode ver, das expressões para $I(x')$, quando $R_L = 0$ a corrente toma a o seu valor máximo em $x' = 0$ ou $x = l$; quando $R_L = R_0$ a corrente toma um valor constante em x' ; quando $R_L \rightarrow \infty$ a corrente toma um valor mínimo (0) em $x' = 0$, que foi o observado experimentalmente.

Pelo que foi apresentado acima, o dobro da distância $\Delta x'$ entre dois zeros de $I(x')$ dá-nos o comprimento de onda λ do sinal injectado. A frequência de trabalho (f) sai directamente da expressão: $f = \frac{c}{\lambda}$.

Apresentam-se na Tabela 4 os resultados obtidos para a frequência de trabalho nas situações: $R_L = 0$ e $R_L \rightarrow \infty$.

⁴É mais fácil fazer-se a análise em termos de tensão e corrente que em termos do campo eléctrico e do campo magnético. Como existe uma ligação estreita entre estes através de: $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V$ e de $\oint \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$

⁵Para reduzir os cálculos ao mínimo suprimiram-se.

ZL (Ω)	λ (m)	f (MHz)
0	0.155	964
∞	0.156	962

Tabela 4: Frequências de trabalho

Medição do comprimento eléctrico de um troço de linha

O comprimento eléctrico (ℓ_e) de um troço de linha é dado pela expressão:

$$\ell_e = \frac{c}{v_{linha}} \ell_f \quad (4)$$

Para o trabalho experimental foi utilizada a seguinte expressão, dada a proximidade entre o comprimento físico e o comprimento eléctrico:

$$\ell_e = (x'_0 - x_0) + n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Que é facilmente compreendida analisando a Figura 4.

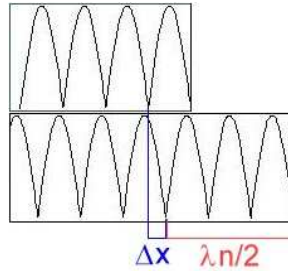


Figura 4: Determinação de ℓ_e

Apresenta-se, na Tabela 5, o comprimento eléctrico dos troços de linha LCF.

LCF	ℓ_e (cm)	$\sqrt{\mu\epsilon}$
10	10.0	5.4×10^{-9}
20	20.1	5.3×10^{-9}

Tabela 5: Comprimento eléctrico (ℓ_e)

Determinação da constante dieléctrica das anilhas

Com a Expressão 4 obtém-se a seguinte igualdade:

$$\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\ell_e - \ell_f + 2a}{2ac}$$

o que nos permite calcular $\sqrt{\mu\epsilon}$. Na Tabela 5, apresenta-se os valores destes produtos, calculados para os diferentes troços LCF.

Partindo do princípio que o material de que são feitas as anilhas é *paramagnético* ou *diamagnético*, como são exemplo o alumínio e o ouro, logo a sua permeabilidade relativa é da ordem de 1. Os valores da permitividade do material das anilhas são apresentados na Tabela 6.

LCF	ϵ
10	2.3×10^{-11}
20	2.2×10^{-11}

Tabela 6: Permittividade do material das anilhas (ϵ)

Conclusões

Determinação da frequência de trabalho

No que diz respeito à frequência de trabalho obtida, esta é bastante boa, uma vez que o gerador havia sido regulado com uma frequência de 950MHz, o que dá uma diferença de cerca de 1.4%, o que é perfeitamente aceitável.

Da análise da Tabela 7, verifica-se que apenas o valor da razão, para a carga, $ZL \rightarrow \infty$, é que é concordante com as previsões teóricas. Quando, $ZL = 0$, o valor é diferente em cerca de 42%, o que é muito. Não sabemos ao que se poderá dever esta disparidade, o que nos ocorreu foi a hipótese do curto circuito não ser um curto circuito mas sim uma resistência. Determinámos que resistência teria de ser, ao invés de um curto circuito e deu-no o valor de 14Ω , o que nos parece elevado, quando comparado com os 0 que devia ser.

ZL	$\left \frac{I(x')_{R_L \neq R_0}}{I(x')_{R_L = R_0}} \right _{teo}$	$\left \frac{I(x')_{R_L \neq R_0}}{I(x')_{R_L = R_0}} \right _{exp}$
0	2	2.82
∞	2	2.01

Tabela 7: Razões entre as correntes

Impedância da linha de transmissão

Para uma linha de transmissão coaxial, sem perdas $R = 0$, $G = 0$, a sua impedância é dada por:

$$Z_0 = R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Para a linha de transmissão utilizada obteve-se uma impedância de $R_0 = 44\Omega$, o que é diferente dos 50Ω utilizados. Pensamos que seja esta disparidade o que justifique a ligeira oscilação, com a posição, das medições feitas no amperímetro. Olhando para a Figura 5⁶, vê-se nitidamente a forma de $I(x')$. Note-se a ligeira oscilação para $ZL = \infty$.

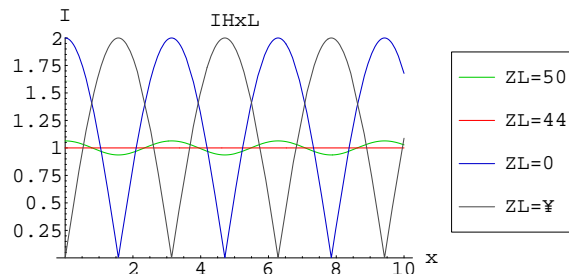


Figura 5: $I(x')$ para diversos valores de ZL

⁶Relembre-se, novamente que $x' = \ell - x$, ou seja, quando $x' = 0$ significa que $x = \ell$, ou seja, em $x' = 0$ temos a corrente na carga.

Medição do comprimento eléctrico de um troço de linha

O valor obtido para o comprimento eléctrico do troço LCF é bastante satisfatório uma vez que estes concordam, com grande precisão com os dados do fabricante.

Quanto ao resultado da permitividade do material constituinte das anilhas, parece ser um bom resultado uma vez que estas poderão ser de *plexiglass*, parafina, polietileno ou poliestireno. Como é sabido o *plexiglass* tem uma permitividade relativa de 3.4, a parafina de 2.2, o polietileno de 2.3 e o polystyrene de 2.6 . O resultado obtido resulta numa permitividade relativa de 2.6, o que é um valor adequado, tendo em conta que não se sabe que material é, pensa-se que será do tipo dos já mencionados.

Comentários

No guia experimental consta que

Este trabalho deve ser apresentado apenas com as tabelas e cálculos necessários e um conjunto mínimo de informação.

A nosso ver todos os cálculos que foram efectuados são relevantes para a compreensão do trabalho e justificação das expressões utilizadas, apesar do tamanho deste. Consideramos que, retirando qualquer uma das expressões o trabalho ficaria incompreensível.

Bibliografia

- Cheng, David K., *Field and Wave Electromagnetics*, segunda edição;
- Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, terceira edição.