

Exercícios de Energias Alternativas

2002-03

Artur Palha n° 46724
Tiago Osório n°46762

10-3-2003

Exercício 1

Determine o rendimento do esquentador.

Para a determinação do rendimento do esquentador fizemos as seguintes medições:

1. Temperatura da água ambiente;
2. Temperatura da água aquecida — este valor obtém-se após o decorrer de algum tempo, por forma a deixar estabilizar a temperatura da água;
3. Para um determinado volume de água mediu-se o volume de gás utilizado no seu aquecimento.

Os dados obtidos foram, pela ordem indicada anteriormente, os seguintes:

1. $T_{amb} = 20^\circ\text{C}$;
2. $T_{aquec} = 50^\circ\text{C}$;
3. $V_{agua} = 17.5\text{ l} \simeq 17.5$ e $V_{gas} = 0.09\text{ m}^3$;
4. $C_p(\text{agua}) = 1\text{ cal g}^{-1}\text{ K}^{-1}$;
5. $PC_{sup_{gas}} = 10032\text{ kcal m}^{-1}$;
6. $PC_{inf_{gas}} = 9054\text{ kcal m}^{-1}$.

Sendo U a energia interna da água e Q o calor transferido:

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} \frac{1}{m}$$

Integrando e resolvendo para ΔQ obtém-se:

$$\Delta Q = m C_p \Delta T$$

Como toda a transferência de energia do esquentador para a água é toda feita sob a forma de calor, temos que $\Delta U = \Delta Q$.

O rendimento do esquentador é:

$$\eta = \frac{\Delta U_{agua}}{PC V_{gas}}$$

Substituindo as variáveis pelos seus valores, obtém-se que o rendimento do esquentador é:

$$\eta_{PC_{sup}} = 0.58$$

$$\eta_{PC_{inf}} = 0.64$$

Exercício 3

Quanto custa um duche: água + energia (a gás e a electricidade)

Para o cálculo do volume do gás procedeu-se de duas formas: a primeira consistiu em ler directamente do contador do gás; a segunda consistiu em estimá-lo a partir do rendimento do esquentador e de uma percentagem de água utilizada no banho, que seria aquecida.

Aquecimento a gás

Tiago Osório

Por medição directa dos gastos de gás e água, obtiveram-se os seguintes valores¹:

$$\begin{aligned}V_{\text{água}} &= 0.05 \text{ m}^3 \\V_{\text{gás}} &= 0.24 \text{ m}^3 \\ \text{Tarifa}_{\text{água}} &= 0.1167 \text{ euros m}^{-3} \\ \text{Tarifa}_{\text{gás}} &= 0.5831 \text{ euros m}^{-3} \\ \text{custo} &= 0.15 \text{ euros}\end{aligned}$$

Por estimativa do gasto de gás, considerando que apenas 80% da água utilizada é aquecida e utilizando o rendimento do esquentador descrito anteriormente (exercício 1):

$$V_{\text{gás}} = \frac{m_{\text{água}} C_p \Delta T}{PC_{\text{gás}} \eta} = 0.21 \text{ m}^{-3}$$

O que dá um custo de: 0.13 euros.

Artur Palha

Por medição directa dos gastos de gás e água, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}V_{\text{água}} &= 0.10 \text{ m}^3 \\V_{\text{gás}} &= 0.34 \text{ m}^3 \\ \text{Tarifa}_{\text{água}} &= 0.1167 \text{ euros m}^{-3} \\ \text{Tarifa}_{\text{gás}} &= 0.5831 \text{ euros m}^{-3} \\ \text{custo} &= 0.21 \text{ euros}\end{aligned}$$

Por estimativa do gasto de gás, considerando que apenas 70% da água utilizada é aquecida e utilizando o rendimento do esquentador descrito anteriormente (exercício 1):

$$V_{\text{gás}} = \frac{m_{\text{água}} C_p \Delta T}{PC_{\text{gás}} \eta} = 0.36 \text{ m}^{-3}$$

O que dá um custo de: 0.22 euros.

Aquecimento a electricidade

Os dados relativos à quantidade de energia eléctrica, necessária para aquecer as mesmas quantidades de água aquecida, foram retirados do site da EDP que permite calcular os consumos de aparelhos eléctricos (neste caso um termoacumulador).

¹ aos valores das tarifas acresce IVA à taxa em vigor.

Tiago Osório

Para aquecer os 40l de água utilizados gasta-se 0.174 euros. Adicionando ao custo de água, resulta num gasto total de: 0.18 euros.

Artur Palha

Para aquecer os 70l de água utilizados gasta-se 0.303 euros. Adicionando ao custo de água, resulta num gasto total de: 0.32 euros.

Tabela resumo

Apresenta-se, na tabela 1 o resumo dos valores obtidos para o gasto nos banhos.

	Gás (medido)	Gás (est.)	Electricidade
Tiago	0.15	0.18	0.18
Artur	0.21	0.22	0.32

Tabela 1: Tabela resumo de gastos no banho.

Exercício 4

Análise dos aparelhos domésticos e subsequente estimativa da sua frequência de uso, para a realização de uma previsão do gasto. Comparação com o valor real.

	Designação	Pot. (W)	Méd. dia (h)	C. diário	C. mensal
Cozinha	Torradeira	750	0.03	0.03	0.75
	Grelhador	1000	0.03	0.03	1.00
	Microondas	1400	0.05	0.07	2.10
	Frigorífico			0.97	29.10
	M. L. Roupa	2200	0.29	0.63	18.88
	Aspirador	1000	0.14	0.14	4.29
Sala	Televisão	70	7.00	0.49	14.70
	Rádio	50	4.00	0.20	6.00
	PC	250	20.00	5.00	150.00
Lâmpadas					
Sala	Tecto	60	5.00	0.30	9.00
	Cand. Pé	60	1.00	0.06	1.80
	Parede	150	6.00	0.90	27.00
Cozinha	Fluorescente	8	5.00	0.04	1.20
Quarto	Tecto	60	10.00	0.60	18.00
	Candeeiro	40	5.00	0.20	6.00
C. Banho	Fluorescente	10	0.50	0.01	0.15
Corredor	Fluorescente	10	1.00	0.01	0.30
Total(kWh)					290.27
Factura (kWh)					253.00

Tabela 2: Tiago Osório

Qualquer coisa.

	Designação	Pot. (W)	Méd. dia (h)	C. diário	C. mensal
Cozinha	Torradeira	750	0.030	0.023	0.675
	Grelhador	1000	0.001	0.001	0.030
	Microondas	1400	0.080	0.112	3.360
	Frigorífico			0.900	27.000
	M. L. Roupa	2100	1.000	2.100	63.000
	M. L. Louça	2200	1.000	2.200	66.000
	Aspirador	1350	0.167	0.225	6.750
	Maq. Café	1260	0.050	0.063	1.890
	Fritadeira	2000	0.033	0.067	2.000
Sala	Aparelhagem	55	0.500	0.028	0.825
	Telefone	2	24.000	0.048	1.440
Quarto (1)	PC	250	20.000	5.000	150.000
	Monitor (ON)	30	5.000	0.150	4.500
	Monitor (SBY)	5	3.000	0.015	0.450
	Modem	20	24.000	0.480	14.400
	Col. Som	16	5.000	0.080	2.400
	Impressora	50	0.083	0.004	0.125
Quarto (2)	Televisão	70	4.000	0.280	8.400
	Descodifica	5	24.000	0.120	3.600
Lâmpadas					
Marquise	Fluorescente	8	0.017	0.000	0.004
Cozinha	Fluorescente	8	0.200	0.002	0.048
	Parede	60	1.000	0.060	1.800
Sala	Parede	80	0.167	0.013	0.400
	Mesa	140	0.333	0.047	1.400
	Parede	35	0.333	0.012	0.350
	Parede	35	0.333	0.012	0.350
	Parede	35	0.333	0.012	0.350
	Parede	35	0.333	0.012	0.350
Corredor	Parede	35	1.000	0.035	1.050
	Parede	35	1.000	0.035	1.050
C. Banho	Tecto	40	0.033	0.001	0.040
	Parede	60	1.000	0.060	1.800
Quarto (1)	Parede	150	2.000	0.300	9.000
	Candeeiro	30	4.000	0.120	3.600
Quarto (2)	Parede	60	1.000	0.060	1.800
	Candeeiro	60	4.000	0.240	7.200
Aquecedores		2000	3.000	6.000	180.000
Total(kWh)					540.42
Factura (kWh)					573.00

Tabela 3: Artur Palha

Exercício 5

Quantidade de floresta necessária para absorver as emissões de CO₂ da central termoeléctrica de Sines.

Para a resolução deste exercício seguiu-se duas abordagens:

1. Obter dados relativos à produção de CO₂ por kWh de uma central termoeléctrica e à absorção do mesmo por uma árvore.

2. Obter dados quanto à massa de uma árvore, assumir que todo o seu Carbono é proveniente da fotossíntese, assim determinar o CO₂ absorvido.

Dados:

$$\begin{aligned}1\text{kWh} &\longrightarrow 0.59\text{ kg CO}_2 \\1\text{ árvore} &\longrightarrow 0.059\text{ kg CO}_2 \\1\text{ árvore} &\longrightarrow 4\text{ m}^2\end{aligned}$$

Como a central termoelétrica de Sines produz, em contínuo, 1200 MW, significa que, num ano, produz:

$$1200 \times 24 \times 365 = 10.512 \times 10^6 \text{ MWh}$$

Utilizando a relação de produção de energia e CO₂, verifica-se que a central de Sines produz:

$$10.512 \times 10^9 \times 0.59 \simeq 6.2 \times 10^6 \text{ T CO}_2$$

Para o valor da capacidade de sequestração de CO₂ de uma árvore foi utilizada informação presente no site do Edinburgh Centre for Carbon Management (ECCM): <http://www.eccm.uk.com/>; no documento: <http://www.eccm.uk.com/IR007LU\%20v2.1\%20TD7.PDF>, intitulado *Estimation Of Carbon Offset By Trees - ECCM Technical Document No 7*.

No texto é indicado:

The amount of carbon offset by one hectare of mature oak woodland (of yield class² 4, planted at an initial spacing of 1.2 m, stocking density of 4200 plants per ha, intermediate thinning, excluding soil) is estimated by the ECCM model, to offset 75 tC over a 100 year period. This corresponds to 275 tCO₂.

Adiante no texto é indicado que estes valores são aproximados para as árvores comuns (pinheiro, por exemplo).

Com estes dados, verifica-se que a ser plantada será de:

$$\begin{aligned}N_{\text{tree}} &= \frac{6.2 \times 10^6 \times 100}{275} \\&= 2.25 \times 10^6 \text{ ha} \\&\simeq 22545 \text{ km}^2\end{aligned}$$

Dada a estimativa de plantação do ECCM, 4200 ha⁻¹, ter-se-ia de plantar 9.45×10^9 árvores neste período de 100 anos, obviamente teriam de ser plantadas mais nos primeiros anos, já que este número é para colmatar as que nunca chegam a atingir a maturidade. Fazendo uma média grosseira e supondo que se plantavam todas estas árvores em 10 anos, seria preciso plantar $\simeq 30$ plantas por segundo. Considerando que cada grupo de 5 pessoas plantaria 1 planta por dia, para se fazer esta plantação em 10 anos seriam precisos 2.6×10^6 grupos destas pessoas a trabalhar diariamente durante 10 anos.

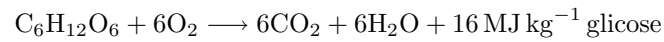
Comparando os resultados para a área de plantação com a área do concelho de Sines (202.7km²) obtemos uma razão de ~ 100 , o que é excessivo.

² *Yield class* é uma medida que indica a capacidade produtiva potencial de uma floresta por metro cúbico, por hectare, logo, uma plantação de *yield class* 4 tem um incremento médio máximo de 4 metros cúbicos por hectare por ano.

Exercício 7

Energia libertada por átomo de C na combustão da glucose.

A reacção de combustão da glucose é descrita pela expressão:



Sabendo as massas molares do C (12.01 g mol^{-1}), H (1.01 g mol^{-1}) e O (16.00 g mol^{-1}) é possível determinar a massa molar da glucose $180.18 \text{ g mol}^{-1}$.

Assim sendo, fazendo uma simples regra de proporcionalidade directa, obtém-se que uma mole de glucose produz uma energia de 2.88 MJ. Dividindo este resultado pelo número de Avogadro e pelo número de átomos de Carbono numa molécula, obtém-se a energia por átomo de Carbono:

$$E_{\text{atomoC}} = 7.98 \times 10^{19} \text{ J} \simeq 4.98 \text{ eV}$$

Exercício 8

Estimar a temperatura de uma chapa negra em Marte e em Vénus e a temperatura dos planetas.

Para a resolução deste exercício torna-se mais prático resolver um problema genérico, ou seja, para um planeta qualquer e, no final, concretizar para os dois em estudo.

Placa negra

Qualquer corpo radia com σT^4 por unidade de área, logo a potência radiada pelo Sol, a uma temperatura T_{\odot} é:

$$P_{\odot} = \sigma T_{\odot}^4 \cdot 4\pi R_{\odot}^2$$

Desta forma, a potência que chega, por unidade de superfície, (p_d) a uma distância d é:

$$\begin{aligned} p_d &= \frac{\sigma T_{\odot}^4 \cdot 4\pi R_{\odot}^2}{4\pi d^2} \\ &= \frac{\sigma T_{\odot}^4 \cdot R_{\odot}^2}{d^2} \end{aligned}$$

Para determinar a temperatura e equilíbrio de uma placa negra (T_{eq}) a uma distância d há que igualar a energia absorvida com a energia radiada. De onde resulta:

$$\frac{\sigma T_{\odot}^4 \cdot R_{\odot}^2}{d^2} = \sigma T_{\text{eq}}^4$$

Resolvendo para T_{eq} , resulta:

$$T_{\text{eq}} = T_{\odot} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}} \quad (1)$$

Planeta

Para um planeta a diferença encontra-se na razão entre a superfície que irradia e a que absorve. Neste, a superfície irradiante é igual à superfície da esfera $4\pi R_{\text{planeta}}^2$ e a superfície absorvente é igual a πR_{planeta}^2 , ou seja, uma razão de $\frac{1}{4}$. Igualando novamente a energia absorvida à energia radiada:

$$\pi R_{\text{planeta}}^2 \frac{\sigma T_{\odot}^4 \cdot R_{\odot}^2}{d^2} = 4\pi R_{\text{planeta}}^2 \sigma T_{\text{eq}}^4$$

Resolvendo para T_{eq} obtém-se:

$$T_{\text{eq}} = T_{\odot} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2d}} = \frac{\sqrt{2}}{2} T_{\text{eq}}^{\text{placa}} \quad (2)$$

Marte

Para a distância do planeta ao sol foi utilizado o valor médio entre o Perihelio e o Aphelio.

Dados:

$$\begin{aligned} R_{\odot} &= 3390 \text{ km} \\ \text{Ph} &= 206.62 \times 10^6 \text{ km} \\ \text{Aph} &= 249.23 \times 10^6 \text{ km} \\ T_{\odot} &= 5670^{\circ}\text{K} \\ R_{\text{M}} &= 696\,000 \text{ km} \\ \sigma &= 5.670 \times 10^{-8} \text{ Jk}^{-4} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Placa

Substituindo os dados anteriores na equação 1, obtém-se:

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{9.89 \times 10^9} \simeq 315^\circ\text{k}$$

Planeta

Substituindo os dados anteriores na equação 2, obtém-se:

$$T_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{9.89 \times 10^9} \simeq 222^\circ\text{k}$$

Vénus

Para a distância do planeta ao sol foi utilizado o valor médio entre o Perihelio e o Aphelio.

Dados:

$$\begin{aligned} R_{\varphi} &= 3390 \text{ km} \\ \text{Ph} &= 107.48 \times 10^6 \text{ km} \\ \text{Aph} &= 108.94 \times 10^6 \text{ km} \end{aligned}$$

Placa

Substituindo os dados anteriores na equação 1, obtém-se:

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{4.23 \times 10^9} \simeq 453^\circ\text{k}$$

Planeta

Substituindo os dados anteriores na equação 2, obtém-se:

$$T_{\text{eq}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{4.23 \times 10^9} \simeq 320^\circ\text{k}$$

Resumo

	Placa ($^\circ\text{k}$)	Planeta ($^\circ\text{k}$)	NASA ($^\circ\text{k}$)
Marte (♂)	315	222	210
Vénus (♀)	453	320	232

Tabela 4: Tabela resumo das temperaturas de corpo negro dos planetas.

Existe apenas uma grande discrepância entre os valores de Vénus, previstos por nós e fornecidos pela NASA. Após uma investigação, uma vez que era estranho este resultado, verificámos que a discrepância era justificada por um coeficiente de reflexão maior em Vénus do que em Marte e na Terra. Este fenómeno não é devido à atmosfera de Vénus mas sim à sua rotação (muito maior que todos os outros planetas, cerca que duas mil horas).

Exercício 10

Desenhar dois CPC bidimensionais com $a = 5$ cm e $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

A abordagem que se seguiu para resolver este problema consistiu em traçar duas parábolas com o foco e o vértice contidos no eixo Oy e rodá-las de $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ para a esquerda e para a direita. O foco e o vértice foram colocados de tal forma que, ao rodar-se de α , o foco ficaria a uma distância $\frac{a}{2}$ do eixo Oy , para a esquerda e para a direita, respectivamente. Assim, ao rodar-se uma parábola para a direita e outra para a esquerda, fica-se com uma distância a entre os focos, que é o desejado. De seguida resta saber a que altura se intersectam a recta de declive $\tan(\theta)$ que parte do foco da parábola rodada para a esquerda, com essa mesma parábola.

O problema será resolvido genericamente, a e θ quaisquer, no final concretizar-se-à.

Equação da parábola - preâmbulo

Analisando o esquema rudimentar da figura 1 facilmente se constata que a distância entre o foco e a directriz é $l = a(\cos(\theta) + 1)$. Pela definição de parábola, todos os seus pontos ($P = (x, y)$)

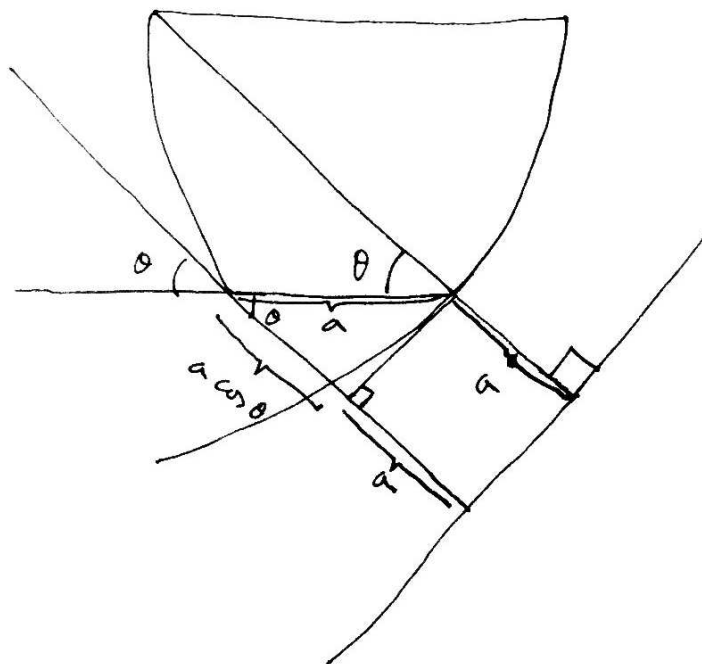


Figura 1: Esquema de um CPC.

encontram-se à mesma distância do foco ($F = (0, \frac{l}{2})$) e da directriz ($d : y = -\frac{l}{2}$). Assim:

$$\overline{PF} = \overline{Pd}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2} = y + \frac{l}{2}$$

O que resulta em:

$$y = \frac{x^2}{2l}$$

A equação de uma parábola com o vértice no ponto (x_v, y_v) é, simplesmente:

$$y = \frac{(x - x_v)^2}{2l} + y_v$$

Equação da parábola - finalização

Disse-se acima que, ao rodar-se, pretendia-se ficar com o foco a uma distância $\frac{a}{2}$ do eixo Oy . Analisemos a figura 2. Verifica-se que a distância do foco ao eixo Oy , depois de se rodar o

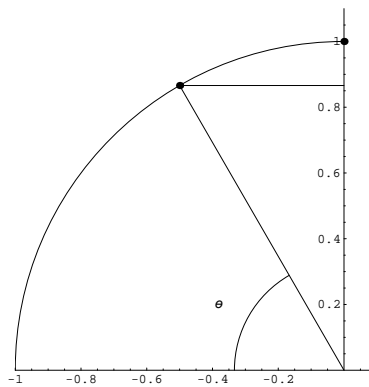


Figura 2: Rotação do foco.

primeiro de α é: $r \sin \alpha$, com r a ordenada do foco. Como se deseja que essa distância seja $\frac{a}{2}$, para uma rotação α , tem-se:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

Logo o foco terá de ter as seguintes coordenadas: $(0, \frac{a}{2 \sin \alpha})$. Quando o vértice da parábola se encontra na origem, o foco tem coordenadas: $(0, \frac{l}{2})$. Para ter as coordenadas desejadas há que subir a parábola de:

$$b = \frac{a}{2 \sin \alpha} - \frac{l}{2}$$

Desta forma a equação da parábola fica:

$$y = \frac{x^2}{2l} + b$$

$$= \frac{x^2}{2l} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \cos \theta - 1 \right)$$

Rotação da parábola

Da álgebra linear, sabe-se que para rodar, de α para a esquerda, objectos num espaço vectorial basta aplicar a matriz de rotação:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Como o que se pretende é rodar as parábolas de $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ para a esquerda e para a direita, basta aplicar $R(\alpha)$ e $R(-\alpha)$, respectivamente.

Para aplicarmos $R(\alpha)$ e $R(-\alpha)$ escrevamos a parábola parametricamente:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{t^2}{2l} + b \\ &= \frac{t^2}{2l} + \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \cos \theta - 1 \right) \end{aligned}$$

Ao aplicar-se $R(\alpha)$ fica-se com o seguinte parametrização da parábola rodada para a esquerda:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t \cos \alpha + \frac{(al - t^2 + al \cos \theta) \sin \alpha - al}{2l} \\ y_1(t) &= \frac{1}{2} \cos \alpha \left[\frac{t^2}{l} + a (\csc \alpha - \cos \theta - 1) \right] + t \sin \alpha \end{aligned}$$

Ao aplicar-se $R(-\alpha)$ fica-se com o seguinte parametrização da parábola rodada para a direita:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t \cos \alpha + \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{l} + a (\csc \alpha - \cos \theta - 1) \right] \sin \alpha \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} \cos \alpha \left[\frac{t^2}{l} + a (\csc \alpha - \cos \theta - 1) \right] - t \sin \alpha \end{aligned}$$

Delimitação do CPC

Base

A base é simplesmente a recta que une os pontos:

$$B_1 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right), \quad B_2 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \right)$$

Topo

O topo é simplesmente a recta que une os pontos:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{a}{2} - l \csc(2\theta) [|\csc(2\theta)| - \cot(2\theta)] \sin(\alpha + 2\theta), \frac{a}{2} \cot \alpha + l \csc(2\theta) [|\csc(2\theta)| - \cot(2\theta)] \sin(\alpha + 2\theta) \tan \theta \right), \\ B_2 &= \left(l \csc(2\theta) [|\csc(2\theta)| - \cot(2\theta)] \sin(\alpha + 2\theta) - \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \cot \alpha + l \csc(2\theta) [|\csc(2\theta)| - \cot(2\theta)] \sin(\alpha + 2\theta) \tan \theta \right) \end{aligned}$$

Traçado das parábolas

A parábola da direita é desenhada para valores de t entre:

$$t_{1d} = a \sin \theta$$

$$t_{2d} = -a \cos \theta \cot \frac{\theta}{2} + \frac{a \csc \frac{\theta}{2} \sec \frac{\theta}{2} \sqrt{\cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) \sec^2 \theta [1 + |\csc(2\theta)| \sin(2\theta)]}}{\sqrt{2}}$$

A parábola da esquerda é desenhada para valores de t entre:

$$t_{1e} = -a \sin \theta$$

$$t_{2e} = a \cos \theta \cot \frac{\theta}{2} - \frac{a \csc \frac{\theta}{2} \sec \frac{\theta}{2} \sqrt{\cos^4 \left(\frac{\theta}{2}\right) \sec^2 \theta [1 + |\csc(2\theta)| \sin(2\theta)]}}{\sqrt{2}}$$

Apresentação dos CPC's

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Para o nosso caso temos que:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

Logo o CPC obtido é o apresentado na figura 3. Note-se que se desceu o CPC de $\frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$, para a

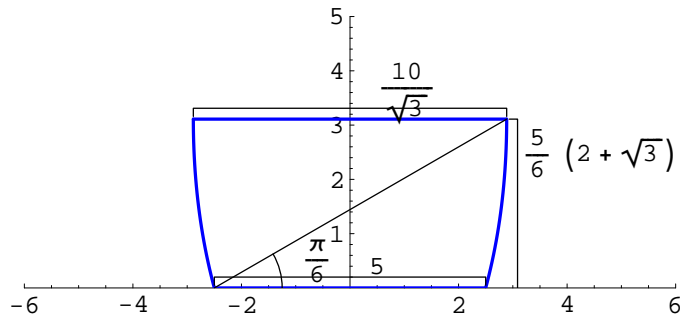


Figura 3: CPC com $\theta = \frac{\pi}{6}$.

base assentar no eixo Ox .

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Para o nosso caso temos que:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$a = 5 \text{ cm}$$

Logo o CPC obtido é o apresentado na figura 4. Note-se que se desceu o CPC de $\frac{a \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$, para a base assentar no eixo Ox .

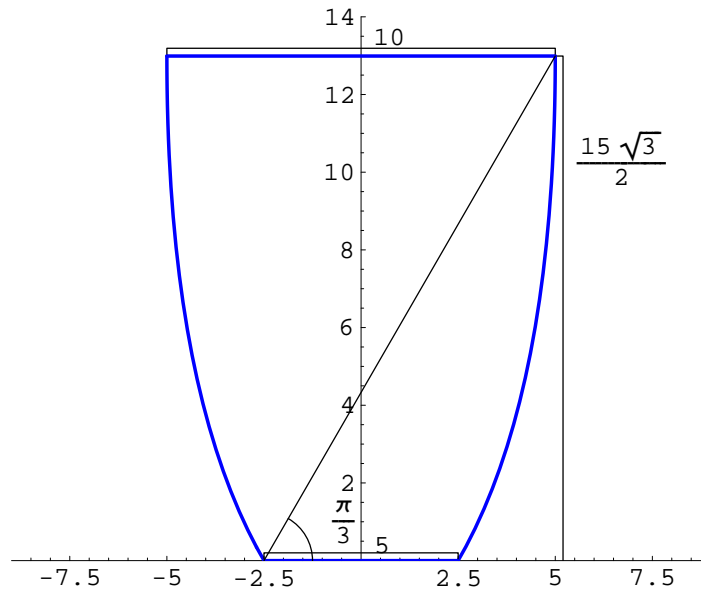


Figura 4: CPC com $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Renewable Energy Resources - 7.1

The band gap of GaAs is 1.4eV. Calculate the optimum wavelength of light for photovoltaic generation in a GaAs solar cell.

O comprimento de onda ideal corresponde ao de energia igual à energia da *band gap*. Se a energia da radiação for inferior à *band gap* não existirá libertação de electrões, se for maior a diferença entre a energia da *band gap* e da radiação será convertida em energia térmica, pelo que se perde parte da energia.

Sabe-se que a energia de um fotão com frequência ν é dada por $E = h\nu$, logo:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Onde λ é o comprimento de onda da radiação.

Uma vez que a energia da *band gap* é de 1.4eV, teremos um comprimento de onda da radiação ideal é:

$$\lambda = \frac{hc}{E} \simeq \frac{6.626 \times 10^{-34} \times 2.998 \times 10^8}{1.4 \times 1.602 \times 10^{-19}} \simeq 8.86 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Este comprimento de onda é da gama do infravermelho. Significando que, visto conseguir converter a energia de fotões de menor comprimento de onda do espectro em corrente eléctrica, quase todo o espectro é utilizado, se bem que com perdas térmicas devido ao facto de a energia absorvida ser superior àquela que é necessário absorver para haver condução.

Renewable Energy Resources - 7.2

a)

Give the equation for the I-V characteristic of a p-n junction diode in the dark.

Quando não é aplicada qualquer tensão de *bias* externa, temos:

$$I_r = I_g$$

Onde:

$I_r \equiv$ corrente de recombinação

$I_g \equiv$ corrente de geração

Com um *bias* externo positivo (V) a corrente de recombinação fica:

$$I_r = I_g e^{\frac{qV}{kT}}$$

A corrente total no escuro é a diferença destas duas correntes:

$$\begin{aligned} I_D &= I_r - I_g \\ &= I_g \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Sendo q a carga do electrão e I_0 é a corrente de difusão. O seu valor, para boas células solares, ronda os 10^{-8} A m^{-2} .

b)

If the saturation current is 10^{-8} A m^{-2} , calculate and draw the I - V characteristic as a graph to $0.2V$. Na figura 5 apresenta-se estas características I - V para os seguintes valores de temperatura: 200°k , 250°k , 300°k , 350°k e 400°k . Verifica-se que com o aumento da temperatura atingem-se

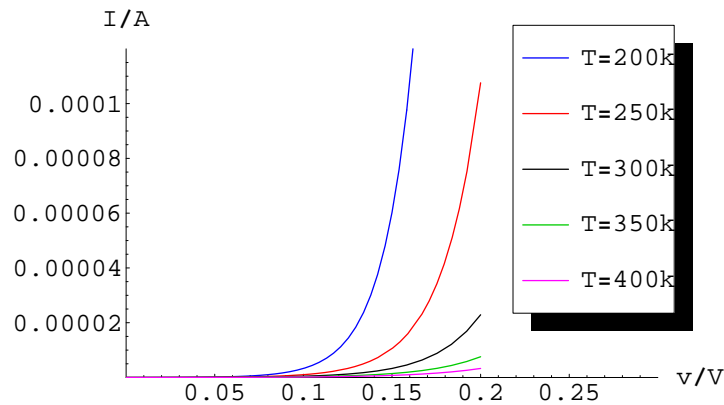


Figura 5: Característica I - V de uma célula solar no escuro.

correntes iguais a tensões mais elevadas.

Renewable Energy Resources - 7.3

a)

What is the approximate photon flux density (photon $\text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}$) for AM1 solar radiation at 0.8 kW m^{-2} ?

Para se obter um valor aproximado o que se faz é dividir a potência incidente pela energia média dos fótons do espectro AM1, com vista a obter-se um valor médio por segundo, aproximado, do número de fótons que chegam por m^2 .

Observando o gráfico da figura 7.12b), pg. 156 do livro *Renewable energy resources* verifica-se que o valor médio, aproximado, para a energia dos fótons será de 1.4eV.

Assim:

$$\begin{aligned}\phi_{ph} &= \frac{P_{\text{incidente}}}{bar E_{ph}} \\ &\simeq \frac{0.8 \text{ kW m}^{-2}}{1.4 \text{ eV} \times 1.602 \times 10^{-19} \times 10^{-3}} \\ &\simeq 3.6 \times 10^{-21} \text{ photon m}^{-2} \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

Este valor é superior ao apresentado pelo livro para o espectro solar no vácuo, ou seja, fora da atmosfera terrestre. As reacções que se dão na atmosfera aumentam o número de fótons disponíveis, embora com energias mais reduzida.

b)

AM1 insolation of 0.8 kW m^{-2} is incident on a single Si solar cell of area 100 cm^{-2} . Assume 10% of photon cause electron-hole separation across the junction leading to an external current. What is the short-circuit current of the cell?

Utilizou-se a expressão:

$$I = I_0 \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) - I_L$$

com I_L a corrente produzida pelo facto de haver incidência de luz.

Na alínea anterior verificou-se que se produz $3.6 \times 10^{-21} \text{ photon m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Se 10% causar *electron-hole* e uma vez que a área é de 0.01 m^2 , irá ser produzida uma corrente de:

$$\begin{aligned}I_L &= 2 \times 3.6 \times 10^{-21} \times 0.1 \times 0.01 \text{ electron .s}^{-1} \\ &= 7.2 \times 10^{18} \text{ electron .s}^{-1}\end{aligned}$$

O que dá uma corrente, em A de: 1.15A.

Sketch the I-V characteristic for the cell.

Achou-se, tal como foi feito anteriormente, apresentar o gráfico da característica I-V da célula para diferentes valores de temperatura, figura 6. Note-se que o que é apresentado é o simétrico do valor correcto, pelo que, para obter valores com sinal adequado há que multiplicar por -1. Algo que é interessante notar é o aparente aumento da potência extraída com o aumento da temperatura, figura 7, a legenda é idêntica. Ao observar-se a figura 8 vê-se nitidamente o carácter linear do máximo de corrente. Do ajuste efectuado ao valores dos máximos, uma vez que a função era transcendental e não foi possível encontrar uma solução analítica, obteve-se a seguinte função:

$$P_{\text{max}}(T) = -0.00436249 + 1.41215 T$$

O esperado seria que $b = 0$ e não $b = -0.00436249$, mas os erros introduzidos na obtenção dos máximos justificam claramente esta ligeira discrepância.

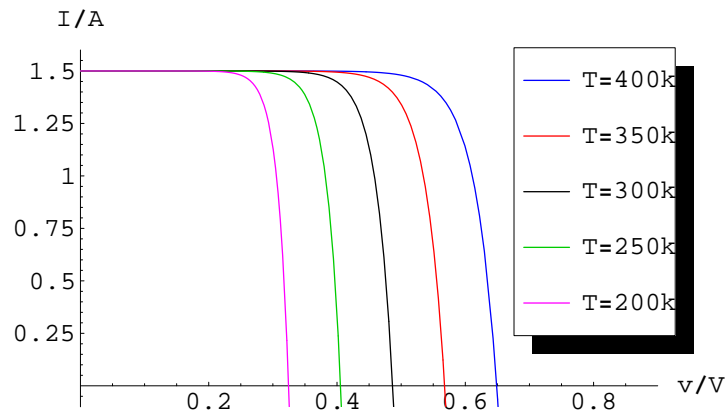


Figura 6: Característica (-)I-V de uma célula solar sob radiação de 0.8 kW m^{-2} .

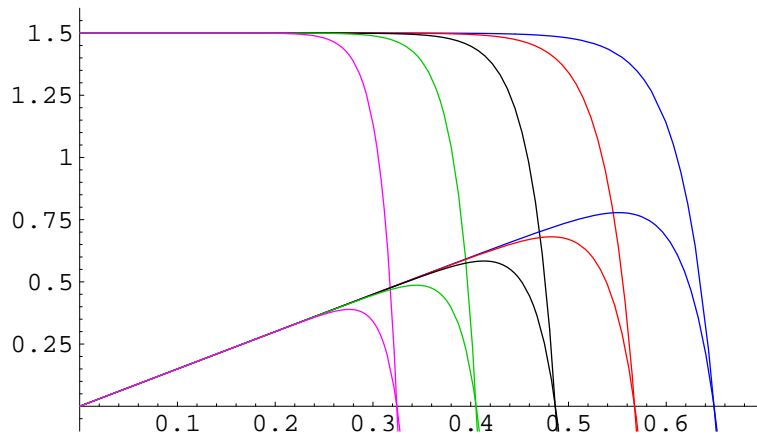


Figura 7: Característica (-)I-V de uma célula solar sob radiação de 0.8 kW m^{-2} e a potência extraída.

Renewable Energy Resources - 9.1

From (9.16) the fraction of power extracted from the wind is the power coefficient $C_p = 4a(1-a)^2$. By differentiating with respect to a , show that the maximum value of C_p is $\frac{16}{27}$ when $a = \frac{1}{3}$.

A expressão de C_p é:

$$C_p = 4a(1-a)^2$$

Diferenciando em ordem a a e igualando a zero:

$$\frac{dC_p}{da} = 4(1-a)^2 - a(1-a) = 0$$

resulta em:

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

Utilizando a fórmula resolvente:

$$a = 1 \quad \vee \quad a = \frac{1}{3}$$

Em $a = 1$ trata-se de um ponto de inflexão. Em $a = \frac{1}{3}$ é, de facto, um máximo.

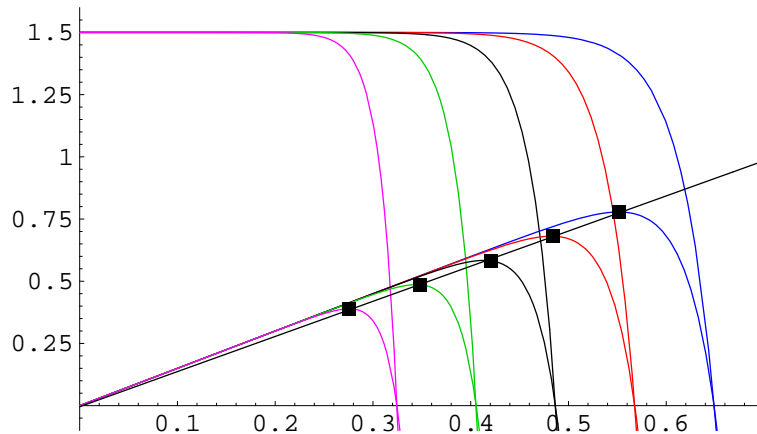


Figura 8: Ajuste do máximo de potência para temperatura diferentes.

$$\begin{aligned}
 C_p \left(a = \frac{1}{3} \right) &= 4 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3} \right)^2 \\
 &= \frac{16}{27} \\
 &\simeq 0.59
 \end{aligned}$$

Renewable Energy Resources - 9.2

The calculation of power coefficient C_p by linear momentum theory (Section 9.3) can proceed in terms of $b = \frac{u_2}{u_0}$. Show that:

a)

$$C_p = \frac{(1-b^2)(1+b)}{2}$$

Calculemos $C_p = 4a(1-a)^2$ em termos de u_0 e u_2 :

$$\begin{aligned}
 C_p &= 4(a - 2a^2 + a^3) \\
 &= 4 \left(\frac{u_0 - u_2}{2u_0} - \frac{(u_0 - u_2)^2}{2u_0^2} + \frac{(u_0 - u_2)^3}{8u_0^3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_0^3 + u_0^2 u_2 - u_0 u_2^2 - u_2^3}{u_0^3} \tag{3}
 \end{aligned}$$

Calculamos $C_p = \frac{(1-b^2)(1+b)}{2}$ em termos de u_0 e u_2 :

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{(1-b^2)(1+b)}{2} \\ &= \frac{1+b-b^2-b^3}{2} \\ &= \frac{1 + \frac{u_2}{u_0} - \frac{u_2^2}{u_0^2} - \frac{u_2^3}{u_0^3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_0^3 + u_0^2 u_2 - u_0 u_2^2 - u_2^3}{u_0^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Facilmente se constata que as equações 3 e 4 são iguais.

b)

C_p is a maximum at $\frac{16}{27}$ when $b = \frac{1}{3}$

Procedemos da mesma forma que no exercício 9.1. Acharmos o máximo da equação de C_p :

$$\frac{dC_p}{db} = \frac{1}{2} (1 - 2b + 3b^2) \quad (5)$$

Igualando a equação 5 a 0:

$$0 = 1 - 2b + 3b^2$$

utilizando a fórmula resolvente:

$$b = -1 \quad \vee \quad b = \frac{1}{3}$$

$b = -1$ não tem qualquer significado físico uma vez que significaria que $u_0 \cdot u_2 < 0$. Por outro lado, em termos analíticos trata-se de um zero da função. Assim, como se pretendia verificar, o máximo de C_p é atingido quando $b = \frac{1}{3}$.

$$C_p \left(b = \frac{1}{3} \right) = \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{3} \right]}{2} = \frac{16}{27}$$

c)

$a = \frac{1-b}{2}$ where $a = \frac{u_0 - u_1}{u_0}$

Sabemos que:

$$a = \frac{1-b}{2}$$

e que:

$$a = \frac{u_0 - u_2}{2u_0}$$

Igualando as duas equações:

$$\begin{aligned} \frac{u_0 - u_2}{2u_0} &= \frac{1-b}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{u_2}{u_0}}{2} \\ &= \frac{u_0 - u_2}{2u_0} \end{aligned}$$

Renewable Energy Resources - 9.3

By considering the ratio of the areas A_0 and A_1 of Fig. 9.5, show that the optimum power extraction (according to the linear momentum theory) per unit area A_0 is $\frac{8}{9}$ of the incident power in the wind.

Pela conservação de matéria, temos que o caudal em A_0 tem de ser igual ao caudal em A_1 :

$$\rho A_0 u_0 = \rho A_1 u_1$$

Logo:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{3}$$

Fazendo a razão entre a potência existente no vento e a potência extraída, obtém-se:

$$\frac{P_T}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}\rho A_1 u_0^3 C_P}{\frac{1}{2}\rho A_0 u_0^3} = \frac{3}{2} \frac{16}{27} = \frac{8}{9}$$

Renewable Energy Resources - 9.4

Nota introdutória à distribuição de Rayleigh

A distribuição de Rayleigh é:

$$P(x) = \frac{x e^{-\frac{x^2}{2s^2}}}{s^2}$$

Um gráfico desta função é apresentado na figura 9. Calculemos os seus momentos de ordem m

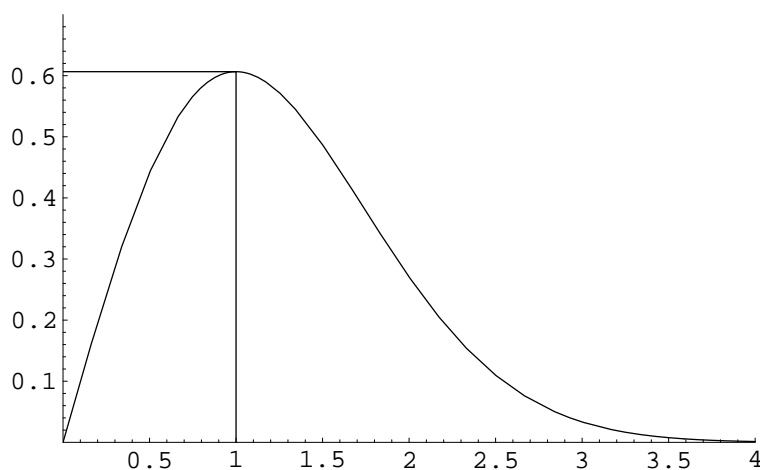


Figura 9: Função de distribuição de Rayleigh para $s = 1$

(μ_m) :

$$\begin{aligned} \mu_m &= \int_0^{\infty} x^m P(x) dx \\ &= \frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} dx \\ &= \frac{1}{s^2} I_{m+1} \left(\frac{1}{2s^2} \right) \end{aligned}$$

onde $I(t)$ é um integral gaussiano. Os primeiros integrais gaussianos são:

$$\begin{aligned} I_1(a^{-1}) &= \frac{1}{2}a \\ I_2(a^{-1}) &= \frac{1}{4}a\sqrt{a\pi} \\ (\dots) \end{aligned}$$

Logo, os primeiros momentos μ_m são:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{2}2s^2\frac{1}{s^2} = 1 \\ \mu_1 &= \frac{1}{s^2}\frac{1}{4}2s^2\sqrt{2s^2\pi} = s\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ (\dots) \end{aligned}$$

Como a média da velocidade do vento é μ_1 :

$$\bar{u} = \mu_1 = s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Logo:

$$s = \bar{u}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{6}$$

For a wind speed pattern following a Rayleigh distribution, prove that:

a)

The most probable wind speed is $0.8\bar{u}$

Basta encontrar o máximo da função distribuição de probabilidade $P(x)$. Derivando e igualando a zero:

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{s^2} \left(e^{-\frac{x^2}{2s^2}} - \frac{x^2}{s^2} e^{-\frac{x^2}{2s^2}} \right) = 0$$

O que resulta em:

$$1 - \frac{x^2}{s^2} = 0$$

Que é:

$$x = s$$

O que significa que a velocidade do vento mais provável é, usando a equação 6:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\simeq 0.798\bar{u} \end{aligned}$$

b)

The most probable power in the wind occurs at a wind speed of $1.60\bar{u}$

A potência total existente no vento é dada por:

$$\begin{aligned} P_T &= \rho A_1 4a(1-a)^2 u^3 \\ &= ku^3 \end{aligned}$$

com $k = \rho A_1 4a(1-a)^2$.

Assim, a probabilidade de se ter uma determinada potência no vento é proporcional a:

$$P_{P_T} \propto P_u u^3 = \frac{u^4}{s^2} e^{-\frac{u^2}{2s^2}}$$

O seu máximo é determinado como anteriormente:

$$\frac{dP_{P_T}}{du} = 4 \frac{u^3}{s^2} e^{-\frac{u^2}{2s^2}} - \frac{u^5}{s^2} e^{-\frac{u^2}{2s^2}} = 0$$

O que resulta em:

$$4 - \frac{u^2}{s^2} = 0$$

O que dá:

$$\begin{aligned} u &= 2s \\ &= 2\bar{u} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\simeq 1.596 \bar{u} \end{aligned}$$

Renewable Energy Resources - 9.8

a)

A WECS maintains a tip speed ratio of 8 at all wind speeds. At which wind speed will the blade exceed the speed of sound?

A *tip speed ration* (λ), por definição é:

$$\lambda = \frac{v_1}{u} = \frac{R\omega}{u}$$

onde R é o raio da turbina, ω é a frequência angular da turbina e u a velocidade do vento. Logo:

$$u = \frac{c_{\text{som}}}{8}$$

A velocidade do som é de 340 m.s^{-1} . Assim, as pás excedem a velocidade do som para ventos com velocidades:

$$u \geq \frac{340}{8} = 42.5 \text{ m.s}^{-1} = 153 \text{ km.h}^{-1}$$

O que é uma velocidade bastante elevada. Já que em[?], ventos com estas velocidades são classificados como tornados de nível 2. Ou seja, é bom que a turbina esteja parada.

Utilizando a equação ?? pode-ser determinar a força aplicada ao nível do rotor:

$$\begin{aligned} F &= \frac{8}{9} \frac{1.225}{2} \times 100^2 \pi \times 42.5^2 \\ &\simeq 31 \times 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

O que dá qualquer coisa como a força gravítica exercida por um corpo de 3100 t.

Considerando que a turbina tem, no mínimo, uma altura de 100 m, isto significa que lhe era aplicado um binário de $3.1 \times 10^8 \text{ kg.m}$. O que é algo desconunal.

b)

A large WECS has a blade diameter of 100m and rotates at constant frequency. At what frequency will the tip speed exceed the speed of sound?

A velocidade da ponta das pás de uma turbina com frequência ω e raio $R = 100$ é:

$$v = \omega R$$

A *tip speed* é superior à velocidade do som para frequências angulares:

$$\omega \geq \frac{c_{\text{som}}}{R} = \frac{340}{100} = 3.4 \text{ rad.s}^{-1}$$

O que dá uma frequência limite de:

$$\nu \simeq 0.54 \text{ Hz}$$

O que é um valor muito pequeno. Dá uma volta completa a cada 2 segundos, aproximadamente.

Renewable Energy Resources - 8.1

Use an atlas to estimate the hydro-potencial of your country or state, as follows:

a)

Call the place in question X. What is the lowest altitude in X? What area of X lies more than 300 meters above the lowest level? How much rain falls on this high part of X? What would be the potential energy per year given up by this mass of water if it all ran down to the lowest level? Express this in megawatts.

A altitude mais baixa em Portugal é 0m.

Para determinar a área de Portugal acima de 300m foi consultado o mapa de altimetria fornecido pelo IGEO [?] e utilizado o software *Autocad2000* para determinar as áreas correspondentes. O valor obtido para esta área foi de $\sim 40000 \text{ km}^2$.

A quantidade de água que cai nesta zona alta é, uma vez que a média de água que cai, por m^2 , em Portugal é 991 l.ano^{-1} [?] é: $991 \times 10^6 \times 4 \times 10^4$.

A energia potencial de toda esta água a uma altura de 300m é:

$$\begin{aligned} E_P &= 991 \times 10^6 \times g \times 300 \times 4 \times 10^4 \\ &\simeq 11.8 \times 10^{16} \text{ J} \end{aligned}$$

Como esta é a energia potencial da perda pela água ao descer dos 300m de altitude para os 0m, ao longo de um ano, a potência é:

$$\begin{aligned} P &\simeq 3700 \times 10^9 \text{ W} \\ &\simeq 3.7 \text{ TW} \end{aligned}$$

O que é cerca de duas vezes o valor apresentado em [?]: 1.8 TW. Note-se que este valor apresentado no livro é relativo ao explorado, sendo que está por explorar 50-60%.

b)

Refine this power estimate by allowing for the following: (i) not all the rain that falls appears as surface runoff; (ii) not all the runoff appears in streams that are worth damming; (iii) if the descent is at too shallow a slope, piping difficulties limit the available head.

A surface runoff por unidade de área, na Europa [?] é: 300 l.ano^{-1} .

Logo a fracção de energia que irá estar disponível será:

$$\frac{300}{991} \simeq 0.03$$

Logo a potência disponível fica reduzida a: $0.303 \times 3.7 \text{ TW} \simeq 1.12 \text{ TW}$. O que já dá um valor inferior.

Quanto aos outros ajustes à estimativa (percentagem de rios explorável e fracção de água que para eles flui), pensamos que poderá ser um factor de 0.6. Ou seja, a nossa estimativa é de que o potencial hídrico seria qualquer coisa como: 0.7 TW .

c)

If a hydroelectric station has in fact been installed at X, compare your answer with the installed capacity of X, and comment on any large differences.

Existe uma diferença de um factor de 2 entre os dois valores. Provavelmente dever-se-à ao facto de, na estimativa das aulas, ter sido utilizado terreno com altura de 200m, por exemplo, o que irá alterar significativamente a potência total. A quantidade de runoff, uma vez que é uma estimativa para a Europa poderá não ser tão correcto para Portugal. A pluviosidade utilizada, sendo um valor médio para Portugal, poderá estar afastado do valor correcto para estas altitudes. De notar que o Alentejo, que tem uma baixa altitude, é das regiões de menor pluviosidade, logo tende a baixar a média. A própria estimativa de 0.6, para a fracção de água que irá ter a rios, poderá ser modesta.

Renewable Energy Resources - 8.4

A Pelton wheel is to be installed in a site with $H = 20 \text{ m}$, $Q_{\min} = 0.05 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$.

a)

Neglecting friction for the moment, find (i) the jet velocity, (ii) the maximum power available, (iii) the radius of the nozzles (assuming there are two nozzles).

(i)

Pela conservação de energia mecânica $\Delta E_P = -\Delta E_C$ e considerando que não existe atrito:

$$gh = \frac{1}{2}v^2$$

O que resulta numa velocidade de:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gh} \\ &= \sqrt{40 \times 9.8} \\ &\simeq 19.8 \text{ ms}^{-1} \\ &\simeq 71.3 \text{ kmh}^{-1} \end{aligned}$$

(ii)

A potência máxima disponível é igual à variação de energia potencial por unidade de tempo: $P = \frac{E_P}{\Delta t}$. A variação de energia potencial por segundo é dada por:

$$\begin{aligned}\Delta E_P &= \frac{\Delta mgh}{\Delta t} \\ &= Qgh \quad (Q \text{ em kg}) \\ &= 50 \times 9.8 \times 20 \\ &= 9800 \text{ W} \\ &= 9.8 \text{ kW}\end{aligned}$$

Trata-se, nitidamente de uma microhídrica.

(iii)

Utilizando a expressão:

$$Q = 2Av$$

Temos que:

$$\begin{aligned}A &= \frac{Q}{2v} \\ &= \frac{0.05}{2 \times 19.8} \\ &\simeq 12.63 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ &\simeq 12.63 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Isto se se considerar que ambas são iguais. Sendo de secção circular, terão um raio de $r \simeq 4.02 \text{ cm}$.

b)

Assuming further that the wheel has shape number

$$\mathcal{S} = \frac{\omega P_1^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} (gH)^{\frac{5}{4}}} = 0.1$$

where P_1 is the power per nozzle, find (iv) the number of cups, (v) the diameter of the wheel, (vi) the angular speed of the wheel in operation.

(iv)

não sei

(v)

Da figura 8.6 de [?], retira-se que, em condições de funcionamento óptimo $\eta_{ij} \simeq 0.9$. Logo:

$$\frac{r_j}{R} = 0.68 (n_j \eta_{ij})^{-\frac{1}{2}} \mathcal{S}$$

Logo:

$$R = \frac{4.02}{0.068 \times (1.8)^{-\frac{1}{2}}} \simeq 79.3 \text{ cm}$$

Que é menor que 1m, tem dimensões adequadas.

(vi)

Para o cálculo da expressão utiliza-se a expressão:

$$\omega = \mathcal{S} \rho^{\frac{1}{2}} (gH)^{\frac{5}{4}} P^{-\frac{1}{2}}$$

Substituindo por valores numéricos:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{0.1 \times 10^{\frac{3}{2}} \times (9.8 \times 20)^{\frac{5}{4}}}{(9.8 \times 10^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &\simeq 22.43 \text{ rad.s}^{-1} \\ &\simeq 3.73 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Este valor é um valor típico de frequências das turbinas.

c)

Não sei

Referências

- [1] "Hurricanes." *World Book Encyclopedia*. Chicago, IL: World Book, 1998: 452-456.
- [2] Atlas digital do ambiente - DGA, www.igeo.pt.
- [3] Fundamental of physical geography, www.geog.ouc.bc.ca/physgeog/contents/8n.html.
- [4] Instituto de Meteorologia de Portugal, www.meteo.pt.
- [5] *Renewable Energy Resources*, Twidell, John W., Weir, Anthony D., London - New York, E. & F. Spon.
- [6] *Energias Renováveis, a opção inadiável*, Collares-Pereira, Manuel, Weir, Anthony D., SPES.