

# Secções biquadráticas com um amplificador

Ana Catarina Pereira nº46721

Ana Vieira da Silva nº46722

Artur Palha nº46724

27 de Junho de 2002

## Resumo

Estudo de secções biquadráticas com um AmpOp. Análise da sensibilidade da resposta em frequência de um filtro passa-baixo de Sallen e Key em relação aos componentes passivos. Análise do efeito de pólo do AmpOp. Transformação RC-CR e transformação complementar.

## Filtro passa-baixo de Sallen e Key

### Esquema do circuito

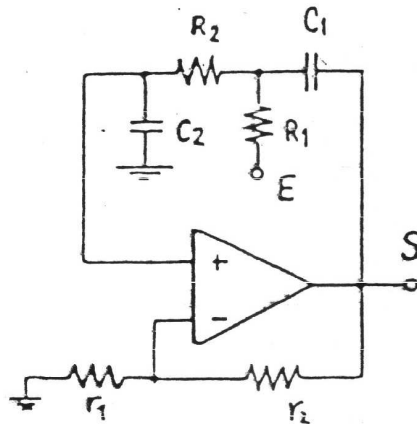


Figura 1: Esquema do circuito passa-baixo de Sallen e Key implementado.

### Função de transferência, frequência angular ( $\omega_0$ ) e factor de qualidade ( $Q_0$ ) teóricos

Uma simples aplicação da lei de Kickoff dá-nos as seguintes equações descritivas do circuito:

$$\begin{cases} \frac{V_o - V_R}{R_2} + \frac{V_i - V_R}{R_1} = (V_R - V_o) s C_1 \\ \frac{V_o - V_R}{R_2} = -V_o s C_2 \end{cases}$$

Substituindo e resolvendo o sistema para  $V_o$ , obtém-se:

$$V_o = V_i \cdot \frac{1}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s C_2 (R_1 + R_2) + 1}$$

Resultando, assim, na seguinte função de transferência do circuito:

$$H(s) \equiv \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Como se sabe, a expressão de referência de um filtro passa-baixo de segunda ordem é:

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Uma comparação entre as duas expressões resulta numa frequência de pólo:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

e num factor de qualidade:

$$Q = \omega_0 \frac{C_1 R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1 R_1 R_2}{(R_1 + R_2) \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Os valores de  $\omega_0$  e  $Q$ , em função dos valores dos elementos passivos do circuito<sup>1</sup> dão:  $\omega_0 = 6356.42 \text{ rad/s} \simeq 1000 \text{ Hz}$ ;  $Q = 4.77$ .

A função de transferência, para  $s = i\omega$ , é:

$$H(i\omega) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{-\omega^2 + i\omega \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Simplificando:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + 1}$$

tendo em atenção que ( $\omega_n \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ ), que é a frequência normalizada, fica:

$$H(i\omega) = \frac{1}{-\omega_n^2 + i\frac{\omega_n}{Q} + 1}$$

Em notação exponencial é:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| \cdot e^{i \arg(H(i\omega))} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q^2}}} \cdot e^{i\theta(\omega_n)}$$

Com:

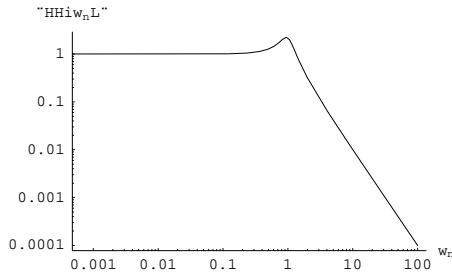
$$\theta(\omega_n) = -\arctan\left(\frac{\omega_n}{(1 - \omega_n^2)Q}\right)$$

Apresentam-se, nas Figuras 2(a) e 2(b), os gráficos das curvas teóricas do ganho do filtro passa-baixo e da sua fase.

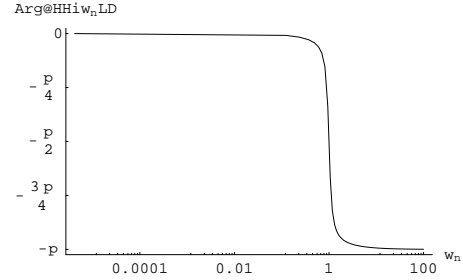
Com os dados experimentais procedeu-se ao ajuste dos dados, por forma a obter-se  $\omega_p$  e  $Q_p$ . Os ajustes são apresentados na Figura 3. Olhando para a Tabela 1, pode-se comparar os resultados experimentais com o previsto teoricamente.

É fácil de notar que o valor de  $Q$  para a *Fase* é totalmente díspar do previsto teoricamente e, até, do obtido para o *Módulo*, mais próximo do teórico. Provavelmente terá existido um erro de leitura sistemático que provocou uma tal disparidade, ou então um erro no ajuste.

<sup>1</sup>Ver guia experimental



(a) Curva teórica do ganho do filtro passa-baixo de Sallen e Key

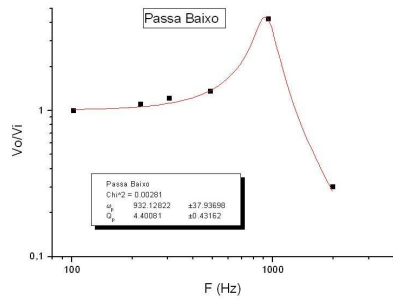


(b) Curva teórica da fase do filtro passa-baixo de Sallen e Key

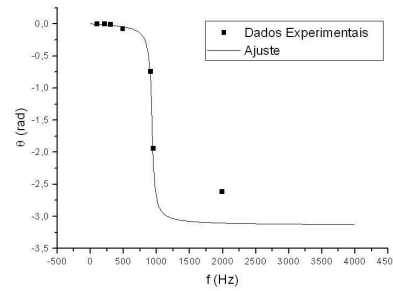
Figura 2: Curvas teóricas do filtro passa-baixo de Sallen e Key

Ajuste	$\omega_p$ (Hz)	$Q_p$
Módulo	932	4.4
Fase	950	15.0

Tabela 1: Dados dos ajustes.



(a) Ajuste do ganho do filtro passa-baixo de Sallen e Key



(b) Ajuste da fase do filtro passa-baixo de Sallen e Key

Figura 3: Ajustes aos dados experimentais para o filtro passa-baixo de Sallen e Key

## Efeito do pólo do AmpOp

Por forma a determinar-se os desvios de  $\omega_0$  e de  $Q$  em relação aos valores que se obtinham com o comutador na posição  $B = 1\text{MHz}$ , procedeu-se à obtenção das expressões algébricas que forneciam  $\omega_p$  e  $Q_p$  em função de  $\omega_{max}$  e do ganho ( $A$ ), quando  $\omega = \omega_{max}$ <sup>2</sup>:

$$Q_p = \sqrt{\frac{A}{2} \left( A + \sqrt{A^2 - 1} \right)}$$

e segue que:

$$\omega_p = \frac{\omega_{max} \sqrt{A}}{(A^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}$$

<sup>2</sup>Uma simples determinação do máximo de  $|H(i\omega_n)|$

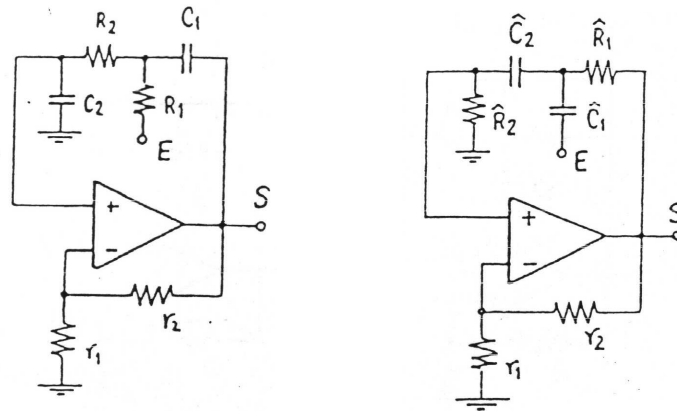
Experimentalmente, obteve-se um máximo para  $V_i = 0.10V$ ,  $V_o = 0.48V$ ,  $f = 892.9Hz$ . O que resulta num ganho  $A = \frac{V_o}{V_i} = 4.8$ . Substituindo, nas expressões, os valores nominais, obtém-se o seguinte resultado:  $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi \times 902.9(MHz) = 5673.0 \text{ rad} \cdot MHz$  e  $Q_p = 4.77$ .

Comparativamente com o obtido para  $B = 1 MHz$ , verificou-se que tanto  $\omega_p$  com  $Q_p$  sofreram uma diminuição, já que os valores obtidos para  $B = 1 MHz$  foram de:  $\omega_p = 2\pi f_p = 2\pi \times 994.2(MHz) = 6246.7 \text{ rad} \cdot MHz$  e  $Q_p = 4.80$ . Como se pode ver, o valor de  $\omega_p$  quando  $B = 1 MHz$  é o que se encontra mais próximo de  $\omega_p$  teórico, que era o esperado.

## Transformação RC-CR

### Esquema dos circuitos

Os circuitos implementados encontram-se presentes na Figura 4.



(a) Passa-Baixo

(b) Passa-Alto

Figura 4: Obtenção de uma descrição passa-alto de Sallen e Key por aplicação de transformação RC-CR à secção passa-baixo de Sallen e Key do esquema da Figura 1

### Obtenção da função de transferência teórica deste filtro passa alto

Novamente, analisando o circuito, verifica-se que as equações que o descrevem são:

$$\begin{cases} (V_o - V_R) s C_2 + (V_i - V_R) s C_2 = \frac{V_R - V_o}{R_1} \\ (V_o - V_R) s C_2 = -\frac{V_o}{R_2} \end{cases}$$

O que conduz à seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Notando que:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \\ Q = \omega_0 \frac{1}{\frac{1}{C_1} \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2 R_2}{(C_1 + C_2) \sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \end{cases}$$

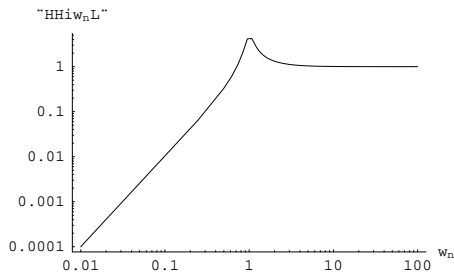
Novamente, substituindo os valores dos componentes, obtém-se:  $\omega_0 \simeq 1000$  Hz e  $Q = 5.0$ . Quando  $s = i\omega$  e fazendo, novamente, a mudança de variável  $\omega_n \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ , obtém-se a seguinte expressão para a função de transferência:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| \cdot e^{i \arg(H(i\omega))} = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q^2}}} \cdot e^{i\theta(\omega_n)}$$

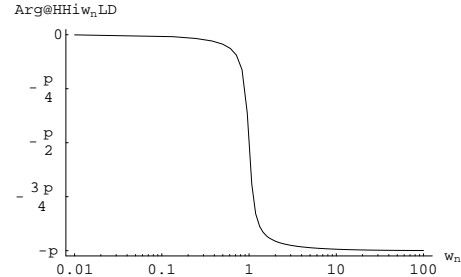
com

$$\theta(\omega_n) = -\arctan\left(\frac{\omega_n}{(1 - \omega_n^2)Q}\right)$$

A curva representativa do ganho é apresentada na Figura 5(a) e da fase é apresentada na Figura 5(b).



(a) Curva teórica do ganho do filtro passa-alto de Sallen e Key



(b) Curva teórica da fase do filtro passa-alto de Sallen e Key

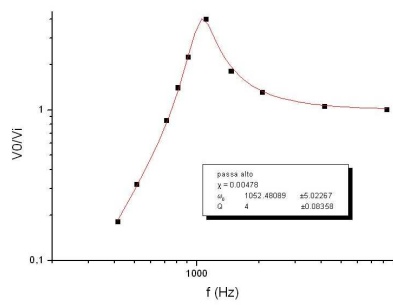
Figura 5: Curvas teóricas do filtro passa-alto de Sallen e Key

Com base nos dados recolhidos no laboratório procedeu-se a uma regressão dos dados, por forma a ajustá-los à curva teórica e, daí retirar os valores de  $\omega_p$  e de  $Q_p$ . O ajuste é apresentado nas Figuras 6(a) e 6(b). Os valores do ajuste são apresentados na Tabela 2.

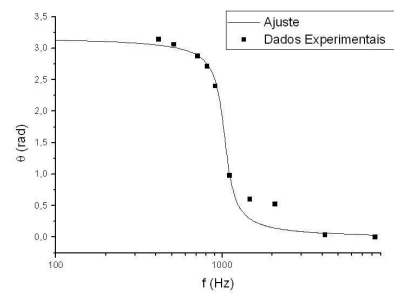
Ajuste	$\omega_p$ (Hz)	$Q_p$
Módulo	1053	4.0
Fase	1037	4.8

Tabela 2: Dados dos ajustes.

Como se pode ver, os resultados são próximos uns dos outros e próximos do esperado teoricamente. Exceção feita para o valor de  $Q_p$  para o ajusto do módulo, onde a diferença é de 17%, face às diferenças de 0.6%.



(a) Ajuste à curva teórica do ganho do filtro passa-alto de Sallen e Key



(b) Ajuste à curva teórica do ganho do filtro passa-alto de Sallen e Key

Figura 6: Ajuste aos dados experimentais do filtro passa-alto de Sallen e Key