

# Teoria de Grupos em Física

## Série 1

Artur Palha nº46724

24 de Outubro de 2002

### Problema 1.1

1. *Determine e Classifique os elementos do grupo de simetrias discreto do tetraedro em termos de rotações em torno de eixos e reflexões em planos de simetria.*

Existem duas operações imediatas que deixam o tetraedro invariante: rotação em torno de um eixo que passa por um vértice pelo centro geométrico da face oposta Figura (1(a)) e reflexão por um plano perpendicular a uma aresta e que intersecta uma face Figura (1(b)). Analisemos

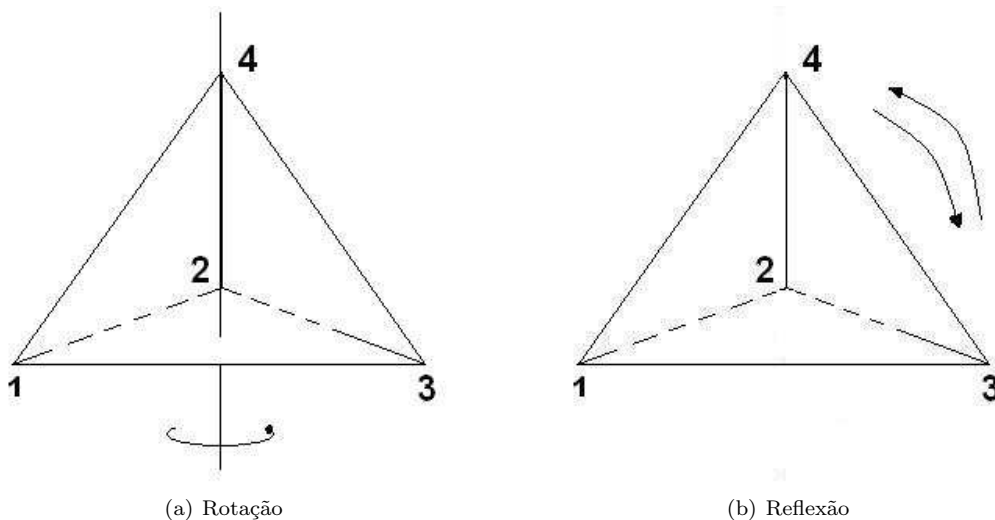


Figura 1: Simetria imediatas do tetraedro.

cada uma das operações de simetria por separado.

#### 1.a.1. Rotação

Como se viu da explicação e da Figura (1(a)), qualquer rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  deixa o tetraedro invariante. Numerando os vértices, obtém-se a transformação exemplificada na Figura (2) transformação: Para cada vértice podem-se realizar duas rotações distintas  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  e  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ , inversas uma da outra. Assim sendo, podem-se realizar  $2 \times 4$  rotações distintas deste tipo. Designemos por  $R_i$  a rotação de  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , em análise, que deixa o vértice  $i$  invariante,  $R_i^2$  designa a mesma rotação mas agora de  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ . Assim sendo  $R_4$  designa a rotação descrita na Figura (2). Todos os seus elementos são:

$$R_1, R_1^2, R_2, R_2^2, R_3, R_3^2, R_4, R_4^2$$

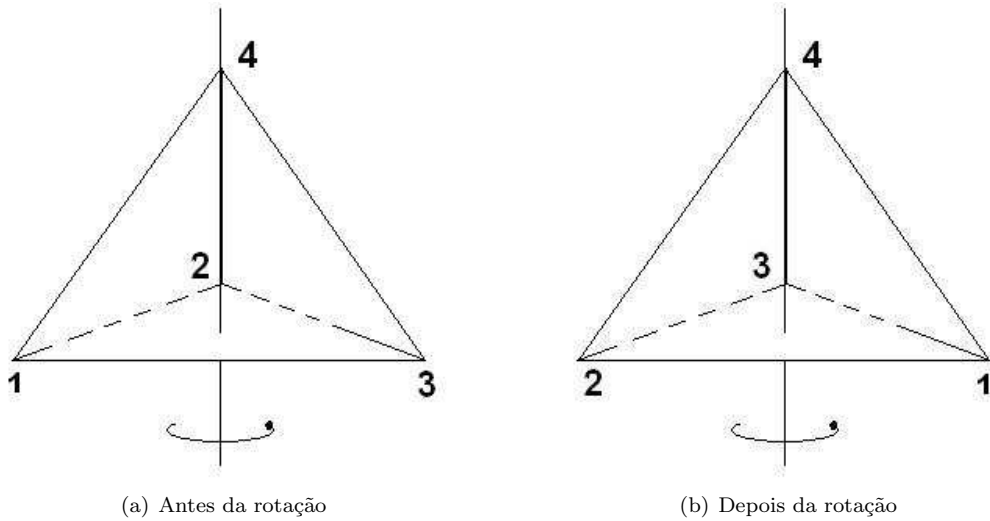


Figura 2: Acção de uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$ .

### 1.a.2. Reflexão

Como se viu da explicação e da Figura (1(b)), qualquer reflexão por um plano que passe por um vértice e seja perpendicular a uma aresta deixa o tetraedro invariante. Numerando os vértices, obtém-se a transformação exemplificada na Figura (3) transformação: Pode-se realizar uma operação destas por cada aresta do tetraedro. Como ex-

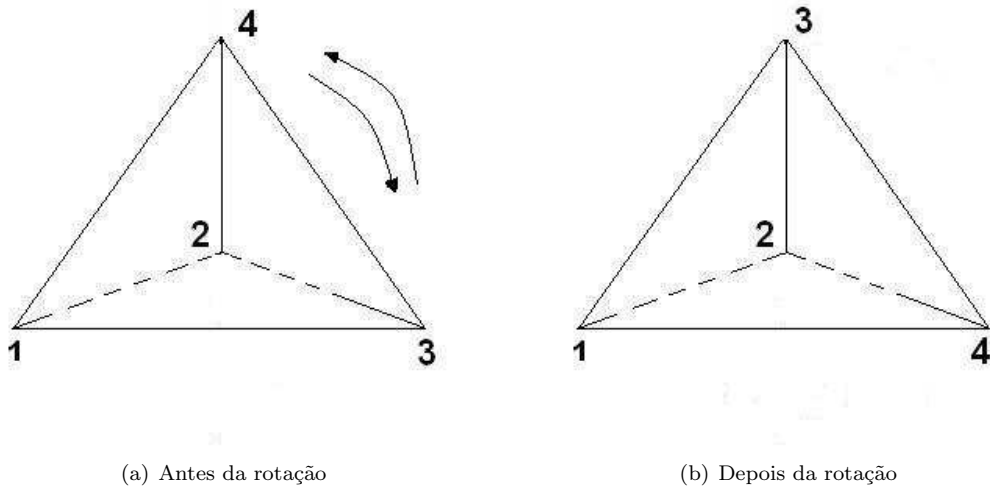


Figura 3: Acção de uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$ .

istem 6 arestas, podem-se realizar 6 operações destas distintas. Designemos por  $E_{ij} = E_{ji}$  com  $i \neq j$ , a reflexão que troca o vértice  $i$  com o vértice  $j$ . Assim sendo  $E_{34} = E_{43}$  designa a reflexão apresentada na Figura (3). Todos os seus elementos são:

$$E_{12}, E_{23}, E_{34}, E_{13}, E_{14}, E_{24}$$

É interessante compor duas rotações, duas reflexões e uma reflexão com uma rotação e analisar que operação resulta. Vejamos uma por uma:

### 1.b.1. Rotação e Rotação.

Uma rotação seguida de outra rotação é apresentada na Figura (4) Facilmente se verifica

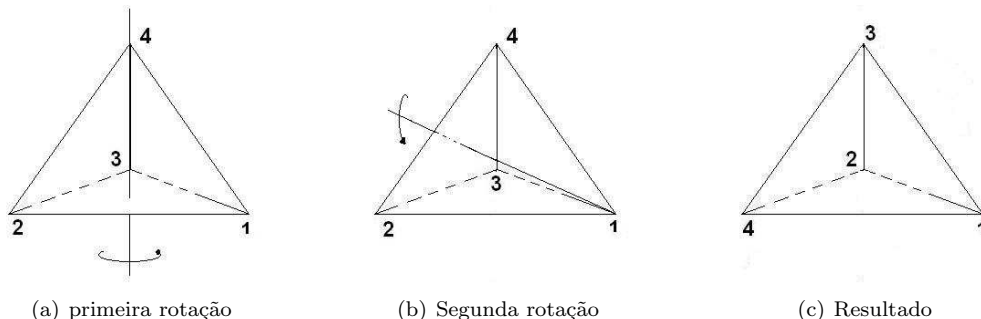


Figura 4: Acção de duas rotações de  $\frac{2\pi}{3}$ .

que (caso da Figura (4))  $R_1R_4 = R_2^2$ . Note-se que se tivéssemos feito a segunda rotação no sentido contrário teríamos obtido  $E_{13}E_{24}$ , duas reflexões.

### 1.b.2. Reflexão e Reflexão

Uma reflexão seguida de outra reflexão é apresentada na Figura (5). Facilmente se verifica

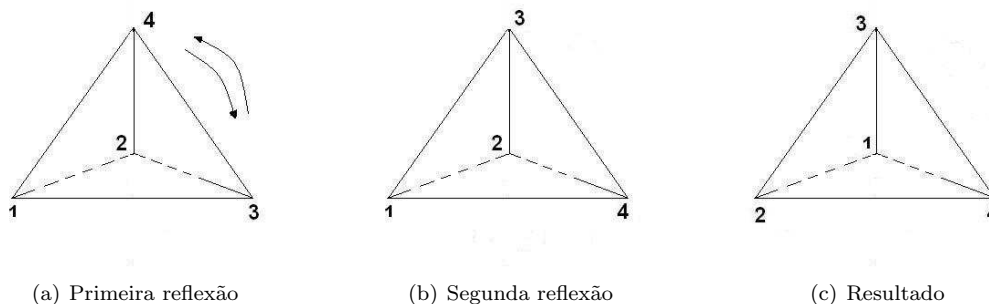


Figura 5: Acção de duas reflexões.

que podem gerar ou uma reflexão dupla ou uma rotação. A composição  $E_{14}E_{34} = R_2$ , resulta, como se pode ver, numa rotação. Duas reflexões disjuntas são apenas duas reflexões disjuntas (não são uma reflexão ou apenas uma reflexão ou uma combinação das duas).

### 1.b.3. Rotação e Reflexão

Uma rotação seguida de uma reflexão é do tipo  $E_{14}R_4$  e que não é nada do que já definimos até agora, no entanto continua a ser uma simetria do tetraedro.

Com esta pequena familiarização com algumas das operações que deixam invariante o tetraedro tentemos vê-las de uma outra forma.

Quando actuamos com um elemento do tipo  $R_i$  no tetraedro, verificamos que o seu vértice  $i$  fica invariante e os outros vértices permutam de lugar. Observando a Figura (2) verificamos que o que sucede é algo semelhante a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ou seja,  $R_4$  pode ser identificado com  $(4)(132) \in S_4$ , pelo menos a sua acção nos vértices do tetraedro é a mesma. Analogamente podemos associar todos os  $R_i$  a um  $(i)(jkl) \in S_4$ , com  $i \neq j \neq k \neq l$ .

Quando actuamos com um elemento do tipo  $E_{ij}$ , ( $i \neq j$ ) no tetraedro, verificamos que os seus vértices  $ij$  trocam de lugar. Observando a Figura (3) verificamos que o que sucede é semelhante a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ou seja,  $E_{34}$  pode ser identificado com  $(1)(2)(34) \in S_4$ , pelo menos a sua acção nos vértices do tetraedro é a mesma. Analogamente podemos associar todos os  $E_{ij}$  a um  $(k)(l)(\tilde{i}\tilde{j})$ , com  $i \neq j \neq k \neq l$ .

Vejam agora o que representa agora o elemento  $(1234)$ . Não é mais do que  $E_{34}R_4$ , ou seja uma rotação seguida de uma reflexão. Mas nós sabemos, nesta nova notação, o que é  $E_{34}R_4$  é simplesmente  $(1)(2)(34) \cdot (4)(123) = (1234)$ , como se verifica em  $S_4$ .

Um raciocínio semelhante podemos fazer para outros casos:  $R_1R_4 = R_2^2$ . Na nova notação:  $(1)(234) \cdot (4)(123) = (2)(134)$ , o que é verdade em  $S_4$ .

Poderíamos continuar desta forma e encontraríamos uma correspondência 1-para-1 entre o nosso grupo e  $S_4$ . A demonstração da existência do isomorfismo entre os dois grupos pode ser feita construindo a tabela de produtos de cada um deles e verificando que, a associação feita entre os elementos dos dois grupos preserva a operação do grupo. Outra justificação, menos exaustiva, é o facto de, uma vez que cada vértice se encontra em contacto com todos os outros, todas as combinações de vértices correspondem a estados possíveis do tetraedro, atingíveis por uma operação de simetria. Daí o isomorfismo com  $S_4$ . Já as simetrias de um quadrado não apresentam essa propriedade. A título de visualização o grupo de simetrias de um triângulo é isomorfo a  $S_3$ , e o de um segmento de recta a  $S_2$ . Escusado será dizer que o de um ponto a  $S_1$ .

Com esta correspondência, pode-se dizer que o grupo de simetria  $G$  do tetraedro tem os seguintes elementos:

$$G = \{(1)(2)(3)(4), (2)(3)(12), (1)(4)(23), (1)(2)(34), (2)(4)(13), (2)(3)(14), (1)(3)(24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (4)(123), (3)(123), (2)(134), (1)(324), (2)(314), (1)(234)(4)(213), (3)(214), (1234), (2134), (1243), (1324), (1432), (4231)\}$$

□

## 2. Calcule as suas classes de conjugação.

Dado o isomorfismo que estabelecemos entre  $G$  e  $S_4$ , podemos utilizar todos os conhecimentos que se tem relativamente a este último.

A classe de conjugação de um elemento  $h$  de  $G$  é, por definição, a órbita de  $h$  sob a acção de conjugação, ou seja:

$$\mathcal{C}_h = \{ghg^{-1} | g \in G\}$$

Convém agora relembrar um resultado importante. Suponhamos que temos a permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$

É representada por um determinado ciclo. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

é representada por  $(1234)$ . Posto isto o resultado importante é: *Sejam  $\sigma$  e  $g$  ciclos, então:*

$$\sigma g \sigma^{-1} = g'$$

onde,  $g'$  tem a mesma estrutura de  $g$  tendo apenas os seus elementos permutados segundo  $\sigma$ .  
Exemplo:

$$\sigma(1)(234)\sigma^{-1} = g'$$

então  $g'$  será dado por:

$$g' = (\sigma(1))(\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4))$$

Ou seja, no nosso caso os elementos de cada classe de conjugação terão a mesma estrutura. Como se irá conjugar cada elementos de  $G$  por todos os outros, todos as combinações possíveis de uma estrutura estão presentes em cada classe de conjugação. Assim sendo é fácil ver que as classes de conjugação são:

$$\mathcal{C}_3 = \{(4)(123), (3)(123), (2)(134), (1)(324), (2)(314), (1)(234), (4)(213), (3)(214)\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \{(1234), (2134), (1243), (1324), (1432), (4231)\}$$

$$\mathcal{C}_{22} = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(2)(3)(12), (1)(4)(23), (1)(2)(34), (2)(4)(13), (2)(3)(14), (1)(3)(24)\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(1)(2)(3)(4)\}$$

□

### 3. Determine o seus subgrupos.

Os subgrupos triviais são  $\{(1)(2)(3)(4)\}$  e o próprio  $G$ . Outros grupos muito simples são:

- i. Os subgrupos formados pela identidade e um dois-ciclo, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (k)(l)(ij)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil verificar que forma um subgrupo, já que  $(k)(l)(ij)$  é o seu próprio inverso. Como existem 6 elementos diferentes deste tipo, existem, necessariamente, 6 subgrupos deste tipo.

- ii. Os subgrupos formados pela identidade e um dois-dois-ciclo, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (ij)(kl)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil verificar que forma um subgrupo, já que  $(ij)(kl)$  é o seu próprio inverso. Como existem 3 elementos diferentes deste tipo, existem, necessariamente, 3 subgrupos deste tipo.

- iii. Os subgrupos formados pela identidade e por um três-ciclo e o seu inverso, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (l)(ijk), (j)(ikl)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil verificar que forma um grupo porque  $(l)(ijk)^2 = (j)(ikl)$ . Como se está a manter um elemento fixo  $l$ , podem-se formar 4 subgrupos diferentes deste tipo.

- iv. Os subgrupos formados pela identidade e por todos os outros elementos que deixam invariante um dos vértices, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (k)(l)(ij), (i)(l)(jk), (j)(l)(ik), (l)(ijk), (l)(jik)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil de verificar que forma um grupo já que trata-se de  $S_3$ . Uma vez que podemos fixar 4 elementos diferentes, existem 4 subgrupos distintos deste tipo.

- v. Os subgrupos formados pela identidade e potência de um quatro-ciclo, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (ijkl), (ijkl)^2 = (ik)(jl), (ijkl)^3 = (ilkj)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil de verificar que forma um grupo já que são potências uns dos outros. Poder-se-ia pensar que existiriam 6 subgrupos deste tipo, mas existem apenas 3 porque surgem sempre dois elementos quatro-ciclo emparelhados.

- vi. O subgrupo alternante,  $A_4$ , constituído por todas as permutações pares de  $S_4$ .  
vii. Os subgrupos Diédricos  $D_4$ , do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (ijkl), (ik)(jl), (il)(kj), (j)(l)(ik), (il)(jk), (i)(k)(jl), (ij)(kl)\},$$

$$(i \neq j \neq k \neq l)$$

Fazendo-se todas as contas, verifica-se que, deste tipo, existem 3 subgrupos distintos.

- viii. Os subgrupos formados por um dois-dois-ciclos e dois dois-ciclo, do tipo:

$$\{(1)(2)(3)(4), (i)(j)(kl), (k)(l)(ij), (ij)(kl)\}, \quad (i \neq j \neq k \neq l)$$

É fácil verificar que o produto dos dois dois-ciclo é o dois-dois-ciclos, o quadrado de qualquer um dos elementos é a identidade e o produto do dois-dois-ciclos com um dois-ciclo dá o outro dois-ciclo. Como existem 3 dois-dois-ciclos diferentes, existem 3 subgrupos deste tipo distintos.

□

4. *Verifique se existem subgrupos invariantes.*

Para um subgrupo ser normal (invariante) tem-se de verificar a seguinte relação:

$$\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$$

O subgrupo que contém apenas a identidade e o próprio  $G$  são normais (trivialmente). Analisando todos os outros verifica-se que os únicos que são normais são:

$$\{(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

E o  $A_4$  já referido atrás.

5. *Verifique se o grupo é um produto directo ou semi-directo de subgrupos seus.*

Sabe-se que um grupo  $G$  é o produto semi-directo de dois subgrupos  $H$  e  $A$ , denotando-se por  $G = A \rtimes H$ , se  $H \triangleleft G$ ,  $H \cap A = \{e\}$  e  $G = HA$  for o produto dos subgrupos  $H$  e  $N$ . Como

$O$   $G$  é o produto semi-directo de  $A_4$  com um qualquer subgrupo que contenha elementos com permutações ímpares. É fácil de verificar que se está nas condições do enunciado.

■

## Problema 1.2

1. *Dado um subgrupo  $H$  de um grupo finito  $G$ , escolha um representante  $t_i \in Hg_i$  de cada um dos  $n$  coconjuntos à direita de  $H$  em  $G$ . Determine o núcleo da correspondência  $\sigma : G \mapsto S_n$  entre  $g \in G$  e a permutação:*

$$\sigma_g = \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \cdots & Ht_n \\ Ht_1g & Ht_2g & \cdots & Ht_ng \end{pmatrix}.$$

O núcleo da correspondência, denominado  $\ker(\sigma)$ , é o conjunto de elementos  $g$  que verificam:

$$Ht_i = Ht_i g$$

Para facilitar podemos escolher  $t_i = g_i$ . Temos então:

$$\forall g_i \in Hg_i \quad \exists h', h'' \in H : \quad h'g_i = h''g_i g$$

Multiplicando à esquerda por  $g_i^{-1}h''^{-1}$ , obtém-se:

$$\forall g_i \in Hg_i \exists h', h'' \in H : g_i^{-1}(h'')^{-1}h'g_i = g$$

Como  $H$  é um subgrupo de  $G$  pode-se fazer:  $(h'')^{-1}h' = h \in H$ , logo:

$$\forall g_i \in Hg_i \exists h \in H : g_i^{-1}hg_i = g$$

Assim sendo pode-se afirmar:

$$g \in \ker(\sigma) \iff \exists h \in H : g = g_i^{-1}hg_i$$

Desta forma podem-se gerar todos os elementos de  $\ker(\sigma)$ .

□

2. *Mostre que é um subgrupo.*

Sejam:

$$\begin{aligned} g_0 &= g_i^{-1}h_1g_i \\ g'_0 &= g_j^{-1}h_2g_j \end{aligned}$$

Será o seu produto um elemento do  $\ker(\sigma)$ ?

$$g_0g'_0 = g_i^{-1}h_1g_i g_j^{-1}h_2g_j$$

Mas  $g_i$  e  $g_j$  são quaisquer, logo pode-se escolher  $g_i = g_j$ . Logo:

$$g_0g'_0 = g_i^{-1}h_1h_2g_i$$

mas, como  $H$  é subgrupo de  $G$ , tem-se:

$$g_0g'_0 = g_i^{-1}hg_i$$

Logo  $g_0g'_0$  obedece à equação definidora de  $g$ , logo  $g_0g'_0 \in \ker(\sigma)$ , o que quer dizer que  $\ker(\sigma)$  é um subgrupo de  $G$ .

□

3. *Verifique se é normal (ou em que condições o é.)*

Tem-se:

$$\forall g_i \exists h : g_0 = g_i^{-1}hg_i, g_0 \in \ker(\sigma)$$

A igualdade mantém-se se se multiplicar à esquerda e à direita por  $g'^{-1}$  e  $g'$ , respectivamente:

$$\forall g_i \exists h : g'^{-1}g_0g' = g'^{-1}g_i^{-1}hg_i g'$$

Mas como (foi provado acima)  $\ker(\sigma)$  é um subgrupo,  $g'^{-1}g_i = (g_i g')^{-1} \in \ker(\sigma)$ , pode-se escrever:

$$\forall g'' \exists h : g'^{-1}g_0g' = (g'')^{-1}hg''$$

Só que isto é o mesmo que:

$$\forall g' \exists h : g'^{-1}g_0g' = \bar{g}$$

De onde se conclui:

$$\ker(\sigma) \triangleleft G$$

■